

新竹市新竹女中 114 上高二第二次期中考

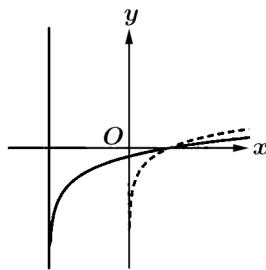
參考數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$

第壹部分：選擇（填）題（占 90 分）

一、單選題（占 10 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 5 分。

1. 如圖， Γ_1 為函數 $f(x) = \log x$ 之部分圖形， Γ_2 為函數 $g(x) = \log_a b(x+c)$ 之部分圖形，其中 a 、 b 、 c 為常數。若圖中之鉛直線 $x = -2$ 為 Γ_2 之漸近線，且 Γ_1 與 Γ_2 的交點位於 x 軸上，則下列選項何者正確？



- (1) $a > 1$ ， $0 < b < 1$ ， $c = 2$
- (2) $a > 1$ ， $b > 1$ ， $c = 2$
- (3) $0 < a < 1$ ， $0 < b < 1$ ， $c = 2$
- (4) $0 < a < 1$ ， $b > 1$ ， $c = -2$
- (5) $a > 1$ ， $0 < b < 1$ ， $c = -2$

2. 根據實驗統計，某種細菌繁殖，其數量每半小時會增為 4 倍。假設實驗室的培養皿一開始有此細菌 20 隻，且經過 50 小時和 51 小時的細菌數分別為 a 、 b ，則 $b - a$ 之值最接近下列哪一個選項？

- (1) 10^{32}
- (2) 10^{49}
- (3) 10^{50}
- (4) 10^{62}
- (5) 10^{63}

二、多選題（占 30 分）

說明：第 3 題至第 5 題，每題 10 分。（每個選項 2 分）

3. 設點 (a, b) 為 $y = \log x$ 圖形上的點，請選出正確的選項。

(1) $(2b, 2a)$ 為 $y = 10^x$ 圖形上的點

(2) $\left(a, b + \frac{1}{2}\right)$ 為 $y = \log 5x$ 圖形上的點

(3) $\left(a, \frac{-b}{\log 2}\right)$ 為 $y = \log_{0.5} x$ 圖形上的點

(4) (a^2, b^2) 為 $10^{(y^2)} = x^2$ 圖形上的點

(5) $\left(b + 2, \frac{a}{100}\right)$ 為 $y = 0.1^x$ 圖形上的點

4. 請選出正確的選項。

(1) $2^{|x|} = -x^2 + 2$ 的所有實根總和為 0

(2) $\log_{\frac{1}{10}} x = 2^{-x}$ 恰有一實根

(3) $\left|\log_{\frac{1}{10}} x\right| = 2^{-|x|}$ 恰有一實根

(4) $\log x^{10} = x$ 恰有兩實根

(5) 設 $a \neq 1$ ，則 $\log a + \log x = \log(a + x)$ 之實根可能小於 1

5. 設函數 $f(x) = 2^x$ ， $g(x) = 3 \cdot 2^x$ ，直線 $y = 5$ 與函數 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的圖形分別交於 P 、 Q 兩點；直線 $y = k > 10$ 與函數 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的圖形分別交於 R 、 S 兩點，請選出正確的選項。

(1) $y = f(x)$ 的圖形經過適當的平移可得 $y = g(x)$ 的圖形

(2) $g(x) + x = 5$ 恰有一正根

(3) k 值愈大， $\overline{RS}$ 長度愈短

(4) 若 $k = 25$ ，則 $\overline{PR}$ 之斜率大於 10

(5) 四邊形 $PQSR$ 為梯形

三、填充題（占 50 分）

說明：第 6 題至第 15 題，每題 5 分。

6. 設 $a > 1$ 且 $a^2 = b^3$ ， $b^4 = c^5$ ，則 $\log_{ab} c =$ 【 】。

7. 設指數函數 $y = t^x$ 的圖形分別與兩直線 $y = 2$ 和 $y = 18$ 交於 A 、 B 兩點，若直線 AB 的斜率為 -4 ，則 $t =$ 【 】。

8. 小沂將 100 萬元存入銀行，約定年利率為 1.8%，半年複利計息一次，則至少要【 】年，小沂領回的本利和才能超過 200 萬元。（請取整數）
(已知 $\log 1.8 \approx 0.2553$ ， $\log 1.018 \approx 0.0077$ ， $\log 1.009 \approx 0.0039$)

9. 設函數 $f(x) = 2^x$ ，將函數 $y = f(x)$ 的圖形水平伸縮 2 倍，再鉛直伸縮 5 倍可得函數 $y = g(x)$ 的圖形；將函數 $y = f(x)$ 的圖形上移 6 單位可得函數 $y = h(x)$ 的圖形，則 $y = g(x)$ 和 $y = h(x)$ 兩函數圖形交點的坐標為【 】。

10. 已知 $0 < a < 1$ ，且當 $1 \leq x \leq 4$ 時， $f(x) = a^{x^2-4x+1}$ 的最小值為 $\frac{1}{4}$ ，則 $f(x)$ 的最大值為【 】。

11. 滿足不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(2x+3) \geq -2$ 之 x 範圍為【 】。

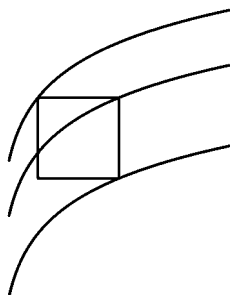
12. 設 $\log 2 = a$ ， $\log 3 = b$ ，試以 a 、 b 表示方程式 $9^x = 15^{3x-1}$ 之解，則 $x =$ 【 】。

13. 設方程式 $10^x + x + 6 = 0$ 之實根為 α ，方程式 $\log \sqrt{x} + \frac{1}{2}x = -3$ 之實根為 β ，則 $\alpha + \beta =$ 【 】。

14. 設 $\frac{1}{1000} \leq x \leq 100$ ，若 $(\log_{\sqrt{10}} x)^2 - \log_{\frac{1}{10}} x^2$ 之最大值為 M ，最小值為 m ，則數對 $(M, m) =$ 【 】。

15. 設正方形 $ABCD$ 各邊皆平行坐標軸，且三頂點 A 、 B 、 C 分別在 $y = \log(3x)$ 、 $y = \log x$ 與 $y = \log \frac{x}{5}$ 三圖形上，如圖所示。

設 C 之坐標為 (a, b) ，則 $10^a =$ 【 】。



第貳部分：混合題（占 10 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

16 — 17 題組

某傳染病的感染率之定義為 $I(t) = \frac{t \text{ 天後被感染過的人數}}{\text{這城市的總人數}}$ ，根據公衛專家的研究， t 天後的感染率 $I(t)$ 可以用下式來表示：

$$I(t) = \frac{1}{1 + k \times a^{\frac{-t}{5}}}$$

若此種傳染病在某城市蔓延，剛開始（即 $t = 0$ 時），感染率為 2%，5 天後感染率為 12.5%，試回答下列問題。

16. 數對 $(a, k) =$ 【 】。（填充題，4 分）

17. 感染率達到 60% 時，是該傳染病的傳染高峰，試問幾天後是該傳染病的傳染高峰？（答案請四捨五入取至整數）（非選擇題，6 分）

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 1 2. 4

3. 3 4. 12 5. 12

6. $\frac{8}{25}$

7. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 39

9. $(2, 10)$ 或 $(2\log_2 3, 15)$

10. 64

11. $2 < x \leq \frac{5}{2}$

12. $\frac{a-b-1}{3a-b-3}$

13. -6

14. $\left(30, -\frac{1}{4}\right)$

15. $5\sqrt{5}$

第貳部分：混合題

16. $(7, 49)$

17. 11 天

6