

市立臺中一中 114 學年度第二學期 期末考 高三數學(甲組) 試題

臺中市立臺中第一高級中等學校試場規則：

科目代碼：03

十二、答案卷（卡）應書寫正確之座號、姓名並正確劃記，違者該科扣 10 分。

超過 100 分以 100 分計算

一、單選題(每題 6 分，共 18 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，劃記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 6 分；未作答、答錯或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 某日某班舉行了一場科學測驗，內容是針對一多重選擇題題目進行作答。該題目有  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  五個選項，答題規則如下：完全答對得 8 分，只答錯 1 個選項得 5 分，答錯 2 個或以上則不得分。一位學生已知  $A$ 、 $B$  是正確答案，然而他對  $C$ 、 $D$ 、 $E$  這三個選項是否正確毫無頭緒，決定用隨機猜測來作答。請問該學生在這題的期望分數  $a$  大約多少介於以下哪個範圍內？
- (1)  $1 \leq a < 2$   
(2)  $2 \leq a < 2.3$   
(3)  $2.3 \leq a < 2.6$   
(4)  $2.6 \leq a < 2.9$   
(5)  $2.9 \leq a < 3.2$
2. 在某次數學競賽中，小明遇到這樣的問題：「試計算等比級數  $i + i^4 + i^7 + i^{10} + \cdots + i^{400}$  之和。」請幫助他計算出正確答案。
- (1)  $1-i$   
(2)  $-1+i$   
(3)  $1+i$   
(4)  $-1-i$   
(5)  $0$

3. 小毅對外宣稱投擲飛鏢有 80% 以上的命中率。某日小毅在小如面前表演投擲飛鏢，結果投 10 次命中 7 次。設隨機變數  $X$  的取值表示投擲飛鏢 10 次命中的次數，且此試驗滿足二項分布  $B(10, 0.8)$ ，其機率分布表如右表。設顯著水準  $\alpha = 0.05$ ，拒絕域為何？
- (1)  $X < 6$   
(2)  $X < 7$   
(3)  $X < 5$  或  $X > 9$   
(4)  $X < 6$  或  $X > 7$   
(5)  $X < 6$  或  $X > 8$

| $x$ | $p(x)$   |
|-----|----------|
| 0   | 0.000000 |
| 1   | 0.000004 |
| 2   | 0.000074 |
| 3   | 0.000786 |
| 4   | 0.005505 |
| 5   | 0.026424 |
| 6   | 0.088080 |
| 7   | 0.201327 |
| 8   | 0.301990 |
| 9   | 0.268435 |
| 10  | 0.107374 |

二、多選題(每題 8 分，共 40 分)

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有 1 個是正確的選項，選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；所有選項均未作答或答錯 3 個以上選項者，該題以零分計算。

4. 設  $f(x)$  為一實係數三次多項式，已知  $f(0) = -5$ 、 $f(2) = 5$  且  $f(2i+1) = 0$ ，其中  $i = \sqrt{-1}$ ，請選出正確的選項。
- (1)  $f(2i-1) = 0$   
(2)  $f(3) = 16$   
(3)  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸恰有一個交點  
(4) 沒有實數滿足  $f(x) = x$   
(5) 沒有實數滿足  $f(x^2) = 0$

還有下一張試題，請繼續作答

5. 在複數平面上，滿足 $|z|=2|z-3i|$ 的複數 $z$ 所成的圖形為 $\Gamma$ ，其中 $i=\sqrt{-1}$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $\Gamma$ 為一個圓
- (2)  $\Gamma$ 的區域面積小於 12
- (3)  $|z|$ 的最小值為 2
- (4) 複數 $z$ 主幅角最小值為 $\frac{\pi}{3}$
- (5) 滿足 $z^{60}$ 為正實數的複數 $z$ 共有 20 個

6. 一袋中有相同大小的紅球 4 顆、白球 3 顆，每次從袋中取出 1 球，觀察顏色後放回袋中，直到取出為紅球則停止取球，袋中每一球被取出的機會均等，設隨機變數 $X$ 表示取球的總次數，以符號 $P(X=k)$ 代表 $X=k$ 的機率，請選出正確的選項。

- (1)  $P(X=3)=\frac{12}{49}$     (2)  $\frac{P(X=2)}{P(X=1)}=\frac{P(X=4)}{P(X=3)}$     (3)  $\frac{P(X>3)}{P(X>2)}=P(X>1)$
- (4) 隨機變數 $X$ 的期望值為 1.75 次    (5) 隨機變數 $X$ 的標準差為 $\frac{21}{16}$ 次

7. 在某次科學展覽中，有一個關於拋物線的展示，內容描述如下：「已知某拋物線 $\Gamma$ 的對稱軸與 $x$ 軸平行，且焦點 $F$ 位於坐標 $(2,0)$ ，焦距為 3。在展示中，提到點 $P(-7,12)$ 也在此拋物線上。」根據這些資訊，請判斷以下哪些敘述是正確的？

- (1) 拋物線的頂點位於 $(5,0)$
- (2) 點 $(2,6)$ 也在該拋物線上
- (3) 拋物線的方程式為 $y^2=-12(x-5)$
- (4) 拋物線的準線方程式為 $y=8$
- (5) 令 $A$ 在拋物線 $\Gamma$ 上，平面上有一點 $B(0,2)$ ，則 $\overline{AB}+\overline{AF}$ 的最小值為 8

8. 複數平面上，相異三點 $A(z)$ 、 $B(z^2)$ 、 $C(z^3)$ ，試選出正確的選項。

- (1) 若 $z=i$ ，則 $\triangle ABC$ 為等腰三角形
- (2) 若 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，則 $\triangle ABC$ 為正三角形
- (3) 若 $\triangle ABC$ 為正三角形，則 $|z|$ 可能大於 1
- (4) 若 $\triangle ABC$ 是以 $\angle B$ 為直角的直角三角形，則 $z$ 為純虛數
- (5)  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三點可能共線

還有下一張試題，請繼續作答

### 三、選填題(每題 6 分，共 48 分)

說明：第 A 題至第 H 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (⑨ ~ ⑳)。  
每題完全答對得 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 擲一個公正骰子二次，設隨機變數  $X$  表示二次出現的點數和，以符號  $P(X=k)$  代表

隨機變數  $X=k$  的機率，則  $P(5 \leq X \leq 8) = \frac{\textcircled{9}}{\textcircled{10}}$

B. 設  $\alpha$ 、 $\beta$  是方程式  $3x^2 - 6x + 1 = 0$  的兩根，試求  $\alpha^3 + \beta^3 = \textcircled{11}$

C. 試求  $(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}})^{14} = \frac{\textcircled{12}\textcircled{13} + \textcircled{14}\textcircled{15}\sqrt{\textcircled{16}} i}{\textcircled{17}}$

D. 在複數平面上，求以  $z^4 + z^2 + 1 = 0$  的四個根為頂點的圖形面積為  $\sqrt{\textcircled{17}}$

E. 已知拋物線  $y^2 = 16x$ ，試求該拋物線上的點到直線  $L: 4x - 3y + 24 = 0$  的最近距離 =

          ⑱          

F. 設拋物線  $\Gamma: (x-3)^2 = 12(y-2)$  上一焦弦  $\overline{PQ}$  之長為 20，若  $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ，

試求  $y_1 + y_2 = \textcircled{19}\textcircled{20}$

G. 設甲袋中有 1 號球、2 號球、3 號球、4 號球各若干顆，每球被取出的機會均等。

某人從甲袋中隨機抽取兩球，記錄兩球號碼後放回，共抽  $n$  次，令隨機變數  $X$  表示

$n$  次試驗中抽到兩球號碼之和為 3 的次數，已知  $E(X) = 5$ ， $E(X^2) = 29$ ，則  $n$  之值為

          ⑳㉑          。

H. 若  $z$ 、 $\omega$  為複數，且  $z + \omega = z^2 + \omega^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}i$ ，則  $z$  的實部為  $\frac{\textcircled{23}\sqrt{\textcircled{24}}}{\textcircled{25}}$ 。

試題結束

市立臺中一中 114 學年度第二學期 期末考 高三數學(甲組) 參考答案

超過 100 分以 100 分計算

一、單選題(每題 6 分，共 18 分)

1.(4) 2.(3) 3.(1)

二、多選題(每題 8 分，共 40 分)(8-5-2-0)

4.(2)(3) 5.(1)(3)(4)(5) 6.(2)(3)(4) 7.(1)(2)(3)(5) 8.(1)(4)(5)

三、選填題(每題 6 分，共 48 分)

A.  $\frac{5}{9}$  B. 6 C.  $64+64\sqrt{3}i$  D.  $\sqrt{3}$  E. 3 F. 18 G. 25 H.  $\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$

市立臺中一中 114 學年度第二學期 期末考 高三數學(甲組) 參考答案

超過 100 分以 100 分計算

一、單選題(每題 6 分，共 18 分)

1.(4) 2.(3) 3.(1)

二、多選題(每題 8 分，共 40 分)(8-5-2-0)

4.(2)(3) 5.(1)(3)(4)(5) 6.(2)(3)(4) 7.(1)(2)(3)(5) 8.(1)(4)(5)

三、選填題(每題 6 分，共 48 分)

A.  $\frac{5}{9}$  B. 6 C.  $64+64\sqrt{3}i$  D.  $\sqrt{3}$  E. 3 F. 18 G. 25 H.  $\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$