

請將答案填至答案卷，得分超過 100 分者以 100 分計算。

一、單選題(每題 5 分，共 20 分。)

1. () 若 $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ ，則 $f(x)$ 之二階導函數 $f''(x) =$

- (1) $6x^2 + 3x - 1$ (2) $-6x^2 - 3x + 1$ (3) $12x^2 + 6x - 2$ (4) $24x + 6$ (5) 24

2. () 已知函數 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 1$ ，試選出其極大值。

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

3. () 試選出定積分 $\int_{-1}^1 x^2 dx$ 之值為何？

- (1) 0 (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{2}{3}$ (5) 1

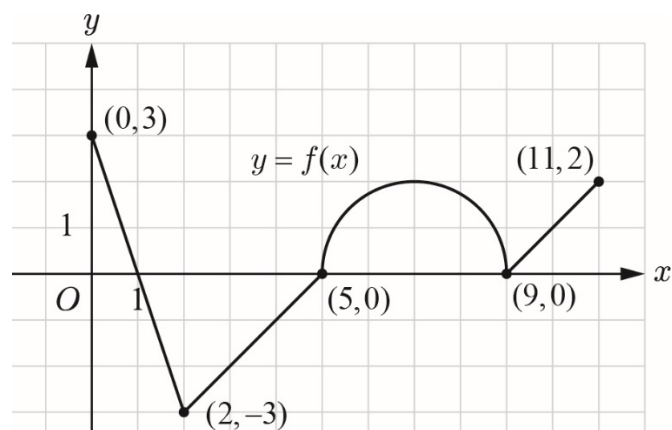
4. () 試利用定積分與面積的關係求解 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 之值為

- (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) π (5) 1

二、多選題(每題 10 分，共 40 分。)

5. () 函數 $f(x)$ 的圖形是由一個半圓與三條線段所組成，如下圖所示。試問下列哪些定積分值是正確的？

- (1) $\int_0^2 f(x) dx = 6$ (2) $\int_2^5 f(x) dx = \frac{9}{2}$ (3) $\int_5^9 f(x) dx = 2\pi$ (4) $\int_5^{11} f(x) dx = 2\pi + 2$ (5) $\int_2^{11} f(x) dx = 2\pi - \frac{5}{2}$



6. () 多項式函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x) = (x+2)(x-3)$ ，試選出正確的選項。

- (1) $f(-2)$ 為極小值 (2) $f(3)$ 為極大值 (3) $f(-2) > f(3)$
 (4) 多項式函數必為 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$ (5) $f(x)$ 在 $[-2, 3]$ 間為遞減函數

7. () 試選出正確的選項。

(1) 函數 $f(x) = x^2$ 在區間 $(-\infty, \infty)$ 恆凹口向上

(2) 函數 $g(x) = -x^3$ 在區間 $(-\infty, 0]$ 恆凹口向下

(3) 函數 $h(x) = x^4 + x^2 + 1$ 的圖形沒有反曲點

(4) 函數 $p(x) = x^3$ 在區間 $(-\infty, \infty)$ 恆遞增

(5) 函數 $q(x) = x^3 - 3x$ 在區間 $(-1, 1)$ 恆遞減

8. () 已知 $f(x) = x^3 - x$ ，試選出正確的選項。

(1) $f(x)$ 在 $x=1$ 的導數為 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

(2) 點 $(1, 0)$ 在 $f(x)$ 上

(3) $f'(1) = 2$

(4) $f(x)$ 的圖形在點 $(1, 0)$ 的切線斜率為 3

(5) $f(x)$ 在點 $(1, 0)$ 的切線方程式為 $x - y - 2 = 0$

三、填充題(每題 5 分，共 25 分。)

A. 若 $f(x) = x^3 + 2x + 1$ ，則在點 $(0, 1)$ 處之切線方程式為_____。(請以 $y = mx + k$ 的形式呈現)

B. 試求函數 $f(x) = x^2 - 2x$ 的圖形與 x 軸所圍區域的面積為_____。

C. 設函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ 之反曲點為 $(1, 6)$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

D. 已知 $f(x) = ax^3 + 3(a+2)x^2 - 3x + 15$ 為三次函數且恆遞減，則實數 a 的範圍為_____。

E. 某小鎮的自來水使用量隨著時間不同而有不同的用量，若自中午 12 時之後的 t 時，每小時用量為

$F'(t) = 36t - 3t^2$ (立方公尺)，則某日自下午 3 時至下午 6 時止，此三小時共用了_____公升的水。

四、混合題(共 10 分。請將答案填至答案卷，並寫下詳細的計算過程。未有計算過程者，不給分。)

甲、假設台積電製造晶片的每日總成本函數為 $C(x) = 0.0001x^3 - 0.12x^2 + 50x + 800$ ，其中 x 萬片為每日產量，成本以億元為單位。

(1) 當 $x = 0$ 時， $C(0)$ 代表尚未開始生產時，台積電投資於建造廠房或機器的成本，試求此成本為何？(4 分)

(A) 750 億元 (B) 800 億元 (C) 850 億元 (D) 900 億元 (E) 1000 億元

(2) 試利用邊際成本函數，求台積電生產 200 萬片時的邊際成本為多少億元？(6 分)

(3) 當邊際成本最小時，每增加一單位成本，可以增加最多的單位產量，試求邊際成本的最小值為多少億元？(6 分)

五、加分題(共 10 分)

乙、已知一個四次實係數多項式 $f(x)$ 的極小值為 $-\frac{27}{16}$ ，反曲點為 $(a, 0)$ 與 $(b, -1)$ ，且圖形與 x 軸交於 $(2, 0)$ 。

另外， $f(x)$ 還滿足下列性質：

x 的範圍	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$f'(x)$	負	負	負	正
$f''(x)$	正	負	正	正

(1) 請選出遞減且凹口向上的區間。(3 分)

(A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$ (E) $(3, 4)$

(2) 試在「答案卷」的坐標平面上畫出 $y = f(x)$ 的圖形，並標記出極值點、反曲點。(7 分)

班級：_____座號：_____姓名：_____得分：_____

一、單選題(每題 5 分，共 20 分。)

1.		2.		3.		4.	
----	--	----	--	----	--	----	--

二、多選題(每題 10 分，共 40 分。)

5.		6.		7.		8.	
----	--	----	--	----	--	----	--

三、填充題(每題 5 分，共 25 分。)

A.		B.		C.	
D.		E.			

四、混合題(共 10 分。請將答案填至答案卷，並寫下詳細的計算過程。未有計算過程者，不給分。)

甲、假設台積電製造晶片的每日總成本函數為 $C(x) = 0.0001x^3 - 0.12x^2 + 50x + 800$ ，其中 x 萬片為每日產量，成本以億元為單位。

(1) 當 $x = 0$ 時， $C(0)$ 代表尚未開始生產時，台積電投資於建造廠房或機器的成本，試求此成本為何？(4 分)

(A) 750 億元 (B) 800 億元 (C) 850 億元 (D) 900 億元 (E) 1000 億元

答：_____

(2) 試利用邊際成本函數，求台積電生產 200 萬片時的邊際成本為多少億元？(6 分)

(3) 當邊際成本最小時，每增加一單位成本，可以增加最多的單位產量，試求邊際成本的最小值為多少億元？(6 分)

五、加分題(共 10 分)

乙、已知一個四次實係數多項式 $f(x)$ 的極小值為 $-\frac{27}{16}$ ，反曲點為 $(a, 0)$ 與 $(b, -1)$ ，且圖形與 x 軸交於 $(2, 0)$ 。

另外， $f(x)$ 還滿足下列性質：

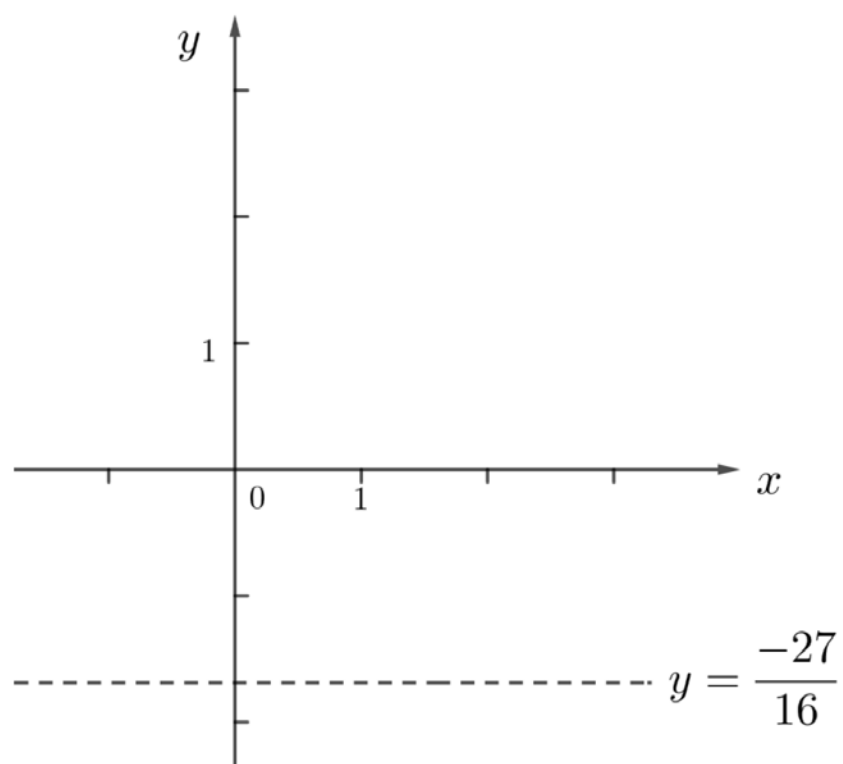
x 的範圍	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$f'(x)$	負	負	負	正
$f''(x)$	正	負	正	正

(1) 請選出遞減且凹口向上的區間。(3 分)

(A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$ (E) $(3, 4)$

答：_____

(2) 試在下方坐標平面上畫出 $y = f(x)$ 的圖形，並標記出極值點、反曲點。(7 分)



簡答

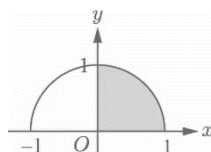
1. (3) 2. (5) 3. (4) 4. (1) 5. (3)(4)(5) 6. (3)(5) 7. (1)(3)(4)(5) 8. (1)(2)(3)

A. $y=2x+1$ B. $\frac{4}{3}$ C. $(-3,5)$ D. $-4 \leq a \leq -1$ E. 297000

詳解

1. 因為 $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ ，所以 $f''(x) = 12x^2 + 6x - 2$ 。選(3)2. $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 = \frac{3}{4}(x^2 - 4) = \frac{3}{4}(x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -2$ 或 2

x 值	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	-3	↗

當 $x = -2$ 時， $f(x)$ 有極大值 5，選(5)3. $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{1^3 - (-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$ 選(4)4. 所求即 $\frac{1}{4}$ 圓面積， $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4}(\pi \times 1^2) = \frac{\pi}{4}$ 選(1)5. (1) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 + \left(-\frac{(2-1)}{2} \times 3\right) = 0$ (2) $\int_2^5 f(x) dx = -\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = -\frac{9}{2}$ (3) $\int_5^9 f(x) dx = \frac{\pi}{2} \times 2^2 = 2\pi$ (4) $\int_5^{11} f(x) dx = \int_5^9 f(x) dx + \int_9^{11} f(x) dx = 2\pi + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2\pi + 2$ (5) $\int_2^{11} f(x) dx = \int_2^5 f(x) dx + \int_5^{11} f(x) dx = -\frac{9}{2} + 2\pi + 2 = 2\pi - \frac{5}{2}$

選(3)(4)(5)

6. 當 $f'(x) = 0$ 有極值，但不能確定是極大或極小值；當 $x > 3$ 、 $x < -2$ 時， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 為遞增函數當 $-2 < x < 3$ 時， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 為遞減函數，所以 $f(-2) > f(3)$ ，則可知 $f(-2)$ 為極大值， $f(3)$ 為極小值 $f'(x) = x^2 - x - 6 \Rightarrow$ 當 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + C$ ， C 為任意實數，則皆可得到導函數為 $f'(x) = (x+2)(x-3)$

選(3)(5)

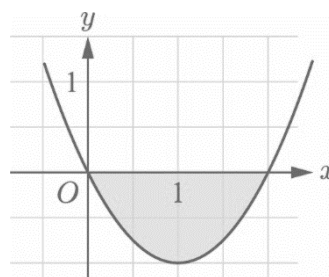
7. (1) $f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \geq 0$ ，正確 (2) $g'(x) = -3x^2 \Rightarrow g''(x) = -6x$ ，當 $x \leq 0$ 時 $g''(x) \geq 0$ ；當 $x \geq 0$ 時 $g''(x) \leq 0$ (3) $h'(x) = 4x^3 + 2x \Rightarrow h''(x) = 12x^2 + 2 = 0$ 無實根，正確 (4) $p'(x) = 3x^2 \geq 0$ ，正確(5) $q'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 1$ 或 -1

x 值	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

故選(1)(3)(4)(5)

8. (1) 正確，導數定義 (2) $f(1) = 1 - 1 = 0$ (3) $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(1) = 2$ (4) 斜率為 $f'(1) = 2$ (5) $L: y = 2(x-1) \Rightarrow 2x - y - 2 = 0$

選(1)(2)(3)

A. $m = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x + 1 - (0 + 0 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2) = 0 + 2 = 2$ $\therefore$ 切線方程式為 $y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 1$ B. $x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 2 所以面積為 $-\int_0^2 (x^2 - 2x) dx = -\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right) \Big|_0^2 = -\frac{2^3 - 0^3}{3} + (2^2 - 0^2) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$

C. 反曲點發生在 $f''(x)=0$ 。 $f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$, $\therefore 6x+2a=0$

$$x=1 \text{ 代入 } \Rightarrow a=-3 \text{ 且 } f(1)=1^3+(-3)\times 1^2+b\times 1+3=6 \Rightarrow 1-3+b+3=6 \Rightarrow b=5 \text{ 得 } (a,b)=(-3,5)$$

D. $f'(x)=3ax^2+6(a+2)x-3$ 因為 $f(x)$ 為遞減函數，所以對所有實數 x , $f'(x)\leq 0$ 。

$$\text{即 } f'(x) \text{ 的判別式 } D=36(a+2)^2-4\times 3a\times (-3)\leq 0 \Rightarrow (a+1)(a+4)\leq 0 \Rightarrow -4\leq a\leq -1$$

E. 設 $F(t)$ 為第 t 小時的自來水消耗量，則下午 3 時為 $t=3$ 、下午 6 時為 $t=6$ ，而消耗的速率函數為 $F'(t)=36t-3t^2$

$$\text{此三小時的總消耗量為 } F(6)-F(3)=\int_3^6 F'(t)dt=\int_3^6 (36t-3t^2)dt=(18t^2-t^3)\Big|_3^6=297$$

$$297m^3=297000l, \text{ 故共用了 } 297000 \text{ 公升}$$

甲、(1) 所求為 $C(0)=0.0001\times 0^3-0.12\times 0^2+50\times 0+800=800$ (億元)，選(B)

(2) 成本函數的導函數為邊際成本函數，即 $C'(x)=0.0003x^2-0.24x+50$ ，

$$\text{則 } C'(200)=0.0003\times 200^2-0.24\times 200+50=12-48+50=14 \text{ (億元)}$$

(3) 邊際成本函數為 $C'(x)=0.0003x^2-0.24x+50$

$$\text{令 } M(x)=C'(x), \text{ 則 } M'(x)=0.0006x-0.24, M''(x)=0.0006$$

當 $M'(x)=0.0006x-0.24=0$ 時，可解得 $x=400$ ，可知 $x=400$ 時， $M(x)$ 有極小值

$M(x)$ 為二次多項式，所以 $M(400)=0.0001\times 400^2-0.24\times 400+50=2$ (億元) 為邊際成本的最小值

乙、(1) (A)

(2)

