

台北市立北一女中 114 學年度第一學期高三期末考數學科試題(忠孝數 A 乙、數甲)

☆ 滿分 104 分，超過 100 分以 100 分計。 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、單選題 (24 分，每題 6 分)

1. 滿足不等式 $\frac{1}{114} \leq (\sqrt{10})^x \leq 2025$ 的整數 x 共有多少個？
(A) 10 個 (B) 11 個 (C) 12 個 (D) 13 個 (E) 14 個。
2. 已知數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{114}$ 中每一項皆為 $0, 1, -1, 5, -5$ 其中一數，則乘積 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{114}$ 有幾種可能的值？
(A) 229 (B) 230 (C) 231 (D) 232 (E) 233。
3. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是首項為 1 且公比為 $10\sqrt{10}$ 的等比數列。試問滿足不等式 $\log a_1 - \log a_2 + \log a_3 - \log a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \log a_n \geq 24$ 的項數 n 之最小值為何？
(A) 30 (B) 31 (C) 32 (D) 33 (E) 34。
4. 坐標平面上，若 $\triangle ABC$ 的三邊長成等差數列，且公差 d 為正數，已知 $\cos A = \frac{-1}{2}$ ， $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 14，試問公差 d 為何？
(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{2}$ (E) $4\sqrt{3}$ 。

二、多重選擇題 (30 分，每題 10 分)

5. 設 $f_1(x), f_2(x)$ 為實係數三次多項式， $g(x)$ 為實係數二次多項式，已知 $f_1(x), f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式分別為 $r_1(x), r_2(x)$ ，請問下列敘述那些是正確的？
(A) $r_1(x)$ 為一次多項式 (B) $f_1(x)+115$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)+115$
(C) $2026f_1(x)$ 除以 $1013g(x)$ 的餘式為 $2r_1(x)$ (D) $f_1(x)f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)r_2(x)$
(E) $f_1(x)f_2(x)-r_1(x)r_2(x)$ 可以被 $g(x)$ 整除。

6. 設函數 $f(x) = \sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x + 2$ ，請問下列敘述那些是正確的？

- (A) $f(x)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$ (B) $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{9}$ 時有最大值 (C) $y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x = \frac{11\pi}{9}$
- (D) $f(1) > 3$ (E) 在區間 $[0, 2]$ 中滿足 $f(x) = 1$ 的所有實數 x 之和超過 $\frac{\pi}{2}$ 。

7. 小綠欲進行一物理實驗來確定某運動之距離 d 與時間 t 的平方或立方成正比，所得數據如下表：

時間 t (秒)	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25
距離 d (呎)	0.92		9.81	15.48	23.39	40.14	48.55	53.65	70.95

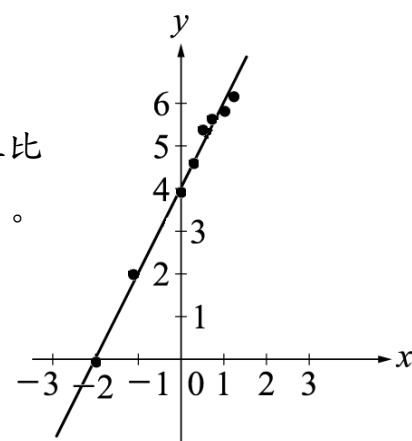
為探索該運動的距離與時間之關係，令 $x = \log_2 t$ ， $y = \log_2 d$ ，即將上述的數據 (t, d) 分別取以 2

為底的對數變換，例如： $(t, d) = (4, 128)$ 變換後成為 $(x, y) = (2, 7)$ 。已知變換後的數據

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_9, y_9)$ 之散佈圖及以最小平方方法所求得變數 y 對變數 x 的最適合直線

(或迴歸直線) 為 $y = ax + b$ ，如右下圖所示。試問下列敘述哪些是正確的？

- (A) x 與 y 的相關係數等於 1 (B) $a = 1$ (C) $b > 3$
- (D) 她可以由最適合直線推論此運動之距離最可能與時間的立方約略成正比
- (E) 若小綠的實驗數據漏抄了 0.5 秒時的運動距離，她可估算 d 必為 5 呎。



三、填充題 (35 分，每題 5 分)

1. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ ，且 A^{-1} 為方陣 A 的乘法反方陣，則 $A^9 - 4A^{-1} =$ _____。

2. 坐標平面上，已知 $\vec{c} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$ ，若 $\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 所決定的平行四邊形面積為 4，則 $\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 所決定的平行四邊形面積為_____。

3. 已知實係數三次多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 得商式 $q(x)$ 和餘式 2。若 $y=q(x)$ 圖形在 $x=1$ 有最小值 3，則 $y=f(-x)+2$ 圖形的對稱中心坐標為_____。
4. 袋中有藍、綠、黃三種顏色的球共 10 顆。今從袋中隨機抽取兩顆球（每顆球被抽中的機率相等），已知抽出的兩顆球皆為藍色的機率為 $\frac{1}{15}$ ，皆為綠色的機率為 $\frac{2}{9}$ ，若從袋中隨機抽出兩顆球是相同顏色的情況下，則此兩顆球皆為黃色的條件機率為_____。
5. 設 $E_1: x-y+z=2$ 、 $E_2: 2x+y+5z=4$ 及 $E_3: 3x+y+5z=6$ 為坐標空間中的三個平面。小綠 為了確定空間中某一定點 P 的坐標，她從 E_1 上的一點 Q_1 偵測得向量 $\overrightarrow{Q_1P}=(1,1,-1)$ ，從 E_2 上的點 Q_2 偵測得向量 $\overrightarrow{Q_2P}=(3,5,-2)$ ，再從 E_3 上的點 Q_3 偵測得向量 $\overrightarrow{Q_3P}=(4,1,-2)$ ，則 P 點的坐標為_____。
6. 坐標空間中，有 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ 四個向量，滿足外積 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{d}$ ，且 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 的向量長度均為 4。設向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ （其中 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ），試問 $\vec{d}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 所張出的平行六面體的體積為_____。
7. 坐標平面上， O 為原點，直線 L 通過 $A(0,6)$ 、 $B(8,0)$ 兩點。已知 $m \cdot k > 0$ ，若直線 $M: y = mx + k$ 可將三角形 ABO 分成凸四邊形與三角形，其中凸四邊形可外接於一圓，且四邊形與三角形面積比為 3:1，則兩直線 L 、 M 的交點為_____。

四、混合題 (15 分) 注意：必須寫出演算過程或理由，否則將酌予扣分。

設 A 、 B 、 C 、 D 為空間中四個相異點，且直線 CD 垂直平面 ABC 。已知 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 10$ ，

$\sin \angle ABC = \frac{4}{5}$ ，且 $\angle ABC$ 為銳角，試回答下列問題。

(1) $\triangle ABC$ 的面積為何？ (5 分)

(2) $\overline{AD}$ 的長度為何？ (5 分)

(3) 平面 ABD 與平面 ABC 所夾兩面角為 θ ，則 $\tan \theta = ?$ (單選題 5 分)

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{5}{4}$ 。

台北市立北一女中 114 學年度第一學期高三期末考數學科答案卷(忠孝數 A 乙、數甲)

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____ 得分：_____

一、 單選題 (24 分)

1. B	2. C	3. D	4. E
-------------	-------------	-------------	-------------

二、 多重選擇題 (30 分)

5. BE	6. ACD	7. C
--------------	---------------	-------------

三、 填充題 (35 分)

1. $\begin{bmatrix} 255\sqrt{3} & 255 \\ 255 & -255\sqrt{3} \end{bmatrix}$	2. 6	3. $(-1,4)$	4. $\frac{1}{14}$
5. $(4,2,-1)$	6. $64\sqrt{15}$	7. $(\frac{12}{5},\frac{21}{5})$	

四、 混合題 (15 分)

(1) 40	(2) $6\sqrt{5}$
(3) (單選題) E	

