

市立臺中一中 114 學年度第二學期期末考 高三數學乙試題

請將答案填寫至答案卷，得分超過 100 分時以 100 分計算。計算題應清楚且逐步驟寫下計算過程，否則不予計分。

一、 單選題 (每題 6 分，共 30 分。)

() 1. 在複數平面上，已知 $z_1 = 2+i$ 、 $z_2 = 1-3i$ ，試問 $z_1 \cdot z_2$ 落在下列哪一個選項內？

- (1) 第三象限 (2) 第四象限 (3) 第二象限 (4) 第一象限 (5) x 軸

() 2. 若方程式 $(2-i)x^2 - 3(1-i)x - 2(1+i) = 0$ 有實根，求實根為何？

- (1) 3 (2) 1 (3) -2 (4) -1 (5) 2

() 3. 已知 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $x+y \geq 3$ 、 $7x+5y \leq 35$ ，試求 $\frac{y+1}{x+3}$ 之最大值為何？

- (1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{11}{3}$ (3) $\frac{13}{3}$ (4) $\frac{8}{3}$ (5) $\frac{1}{3}$

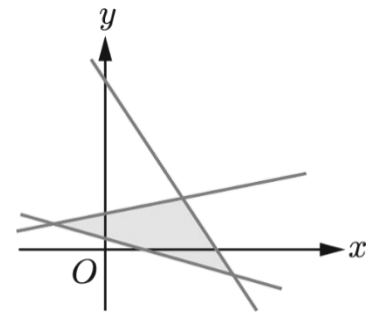
() 4. 設 X 為隨機變數且 $X \sim B(100, \frac{1}{10})$ ，則 X 的期望值與標準差分別為 α 、 β ，試求 $10\alpha + \beta$ 之值為何？

- (1) 103 (2) 93 (3) 100 (4) 40 (5) 127

() 5. 若點 $P(a, b)$ 在三直線 $L_1: x-5y=-7$ 、 $L_2: 2x+7y=3$ 、 $L_3: 3x+2y=13$

所圍成的三角形區域內 (含邊界)，如右圖中塗色部分，試選出正確的選項。

- (1) $a-5b \geq -7$ 、 $2a+7b \geq 3$ 、 $3a+2b \leq 13$
 (2) $a-5b \geq -7$ 、 $2a+7b \leq 3$ 、 $3a+2b \leq 13$
 (3) $a-5b \leq -7$ 、 $2a+7b \geq 3$ 、 $3a+2b \leq 13$
 (4) $a-5b \leq -7$ 、 $2a+7b \leq 3$ 、 $3a+2b \leq 13$
 (5) $a-5b \leq -7$ 、 $2a+7b \leq 3$ 、 $3a+2b \geq 13$



二、 多選題 (每題 8 分，共 24 分。全對得 8 分，錯 1 個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個以上選項得 0 分。)

() 6. 一個箱子內裝有分別編號為 1、2、3 的三顆大小材質均相同的球，每顆球被取出的機會均等。

遊戲甲規則：自箱中先取出 1 顆球，記錄其編號後放回，再繼續自箱中取出 1 顆球，並記錄其編號後放回，設兩次編號之和的隨機變數為 X 。

遊戲乙規則：自箱中一次取 2 顆球，設這 2 顆球的編號之和的隨機變數為 Y 。

試選出正確的選項。

- (1) $E(X) = E(Y)$
 (2) $\text{Var}(X) = \frac{4}{3}$
 (3) $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$
 (4) $P(Y=3) < P(Y=4)$
 (5) $E(X) = 4$

() 7. 已知 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ，則下列各敘述何者正確？

(1) $\omega^3 \times \omega^4 \times \cdots \times \omega^{30} = 1$

(2) $(\omega + 2\omega^2)^2 + (2\omega + \omega^2)^2 = 3$

(3) $(5-3\omega-3\omega^2)(7-2\omega+7\omega^2)(4+4\omega-3\omega^2) = 504$

(4) $(2+5\omega+2\omega^2)-(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5) = 25$

(5) $\sum_{k=1}^{2026} (-1)^{n+1} \omega^{n-1} = 1$

() 8. 下列哪些選項是正確的？

(1) 若二次多項式方程式 $3x^2 + ax + 1 = 0$ 有一根為 $3+2i$ ，則 $3-2i$ 是另一根

(2) 方程式 $2x^2 - 3x^3 + 4x + 1 = 0$ 三根之和為 $\frac{3}{2}$

(3) 有理係數方程式 $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$ 有一根為 $\sqrt{2}-1$ ，則 $p=1$

(4) 對實係數多項式 $f(x)$ 而言，若 $f(3+2i) = 4i-5$ ，則 $f(3-2i) = 4i+5$

(5) 對實係數三次多項式 $f(x)$ 而言，若 $f(3+2i) = 0$ ，則 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸恰有一個交點

三、 填充題 (每題 6 分，共 30 分。)

A. 求 $(-1+\sqrt{3}i)^4$ 的絕對值為_____。

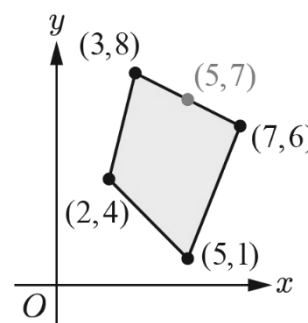
B. 已知複數 z 滿足 $z^2 = -5+12i$ ，求 z 為_____。(兩解，各 3 分)

C. 一個袋子中有 9 枚硬幣，其中 5 枚硬幣為五元硬幣，其它 4 枚為同值的硬幣，
若從袋中一次取出 2 枚硬幣的幣值期望值為 6 元，則其他 4 枚同值硬幣每一枚值為_____元。

市立臺中一中 114 學年度第二學期期末考 高三數學乙試題

請將答案填寫至答案卷，得分超過 100 分時以 100 分計算。計算題請將計算過程清楚且逐步寫下，否則不予計分。

- D. 已知一個線性規劃的可行解區域如右圖，若目標函數 $ax+by+2$ 在邊界上一點 $(5,7)$ 有最大值 40，則數對 $(a,b)=$ _____。



- E. 考慮滿足下列兩條件的二位數：

- (1) 個位數字的三倍減去十位數字的兩倍之差大於等於 3
- (2) 十位數字的四倍與個位數字的和小於等於 37

求滿足條件的二位數中，最大者為_____。

四、 計算題 (甲 8 分，乙(1)~(3)每小題 4 分、第(4)小題 6 分，共 26 分。請清楚且逐步寫下計算過程，否則不予計分。)

- 甲. 串串公司欲進口兩種機器來生產一項產品，第一種機器每臺需要 2 萬美元及新臺幣 45 萬元的維護費；第二種機器每臺需要 5 萬美元及新臺幣 30 萬元的維護費。第一種機器每臺的年利潤為新臺幣 5 萬元，第二種機器每臺的年利潤為新臺幣 8 萬元，但政府核准的外匯為 100 萬美元，且公司的總維護費不得超過新臺幣 1500 萬元，試問串串公司應如何購買，才能獲得最高的年利潤？

- 乙. 有一個抽牌拿獎金活動，規則如下：

在一個不透明的箱子中，有 2 張標示 2000 元的牌、3 張標示 1000 元的牌，以及 5 張標示 0 元的牌。參加者小諺從箱子中隨機抽出 2 張牌，在不知道抽出標示金額為何的情況下將牌蓋在桌面上。主持人檢查這 2 張牌的標示金額，若金額相同，則主持人向箱中加入 2 張標示 3000 元的「黃金牌」；若金額不相同，則主持人向箱中加入 1 張標示 5000 元的「鑽石牌」。接下來，參加者小諺有兩種選擇：

- 選擇(一)：保留原先抽出的 2 張牌，其標示的金額總和即為獲得獎金。
 - 選擇(二)：放棄桌面上的 2 張牌且不放回，改從此時的箱中隨機抽出 2 張新牌，這兩張新牌的金額總和即為獲得獎金。
- 試計算下列各題。

- (1) 求第一階段抽出的兩張牌標示金額相同的機率。
- (2) 若參加者小諺選擇「選擇(一)」，試求其獲得獎金的期望值。
- (3) 在參加者小諺選擇「選擇(二)」的前提下，求其最終能抽中標示 5000 元「鑽石牌」的機率。
- (4) 若參加者小諺選擇「選擇(二)」，試求其獲得獎金的期望值。

市立臺中一中 114 學年度第二學期期末考 高三數學乙答案卷

班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____ 得分：_____

一、 單選題 (每題 6 分，共 30 分。)

1.		2.		3.		4.		5.	
----	--	----	--	----	--	----	--	----	--

二、 多選題 (每題 8 分，共 24 分。全對得 8 分，錯 1 個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個以上選項得 0 分。)

6.		7.		8.	
----	--	----	--	----	--

三、 填充題 (每題 6 分，共 30 分。)

A.		B.		C.	
D.		E.			

四、 計算題 (甲 8 分，乙(1)~(3)每小題 4 分、第(4)小題 6 分，共 26 分。請清楚且逐步驟寫下計算過程，否則不予計分。)

甲. 串串公司欲進口兩種機器來生產一項產品，第一種機器每臺需要 2 萬美元及新臺幣 45 萬元的維護費；第二種機器每臺需要 5 萬美元及新臺幣 30 萬元的維護費。第一種機器每臺的年利潤為新臺幣 5 萬元，第二種機器每臺的年利潤為新臺幣 8 萬元，但政府核准的外匯為 100 萬美元，且公司的總維護費不得超過新臺幣 1500 萬元，試問串串公司應如何購買，才能獲得最高的年利潤？

乙. 有一個抽牌拿獎金活動，規則如下：

在一個不透明的箱子中，有 2 張標示 2000 元的牌、3 張標示 1000 元的牌，以及 5 張標示 0 元的牌。參加者小諺從箱子中隨機抽出 2 張牌，在不知道抽出標示金額為何的情況下將牌蓋在桌面上。主持人檢查這 2 張牌的標示金額，若金額相同，則主持人向箱中加入 2 張標示 3000 元的「黃金牌」；若金額不相同，則主持人向箱中加入 1 張標示 5000 元的「鑽石牌」。接下來，參加者小諺有兩種選擇：

- 選擇(一)：保留原先抽出的 2 張牌，其標示的金額總和即為獲得獎金。
- 選擇(二)：放棄桌面上的 2 張牌且不放回，改從此時的箱中隨機抽出 2 張新牌，這兩張新牌的金額總和即為獲得獎金。

試計算下列各題。

- (1) 求第一階段抽出的兩張牌標示金額相同的機率。
- (2) 若參加者小諺選擇「選擇(一)」，試求其獲得獎金的期望值。
- (3) 在參加者小諺選擇「選擇(二)」的前提下，求其最終能抽中標示 5000 元「鑽石牌」的機率。
- (4) 若參加者小諺選擇「選擇(二)」，試求其獲得獎金的期望值。

市立臺中一中 114 學年度第二學期期末考 高三數學乙參考答案

1. (2) 2. (5) 3. (4) 4. (1) 5. (1) 6. (1)(2)(5) 7. (1)(2)(3)(5) 8. (3)(5) A. 16 B. $2+3i$ 、 $-2-3i$ C. 0.5
D. (2, 4) E. 79 甲. 第一種買 27 臺、第二種買 9 臺，有最高年利潤 207 萬 乙. (1) $\frac{14}{45}$ (2) 1400 (3) $\frac{62}{405}$ (4) $\frac{189520}{81}$

詳解

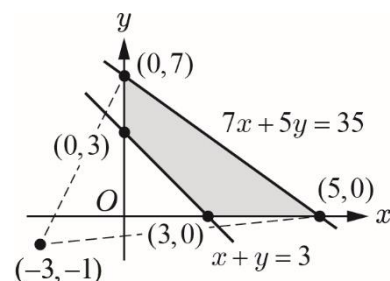
1. $z_1 \cdot z_2 = (2+i)(1-3i) = 5-5i$ 在複數平面的第四象限上，選(4)。

2. 設此實根為 α ，則 $(2-i)\alpha^2 - 3(1-i)\alpha - 2(1+i) = 0 \Rightarrow (2\alpha^2 - 3\alpha - 2) + (-\alpha^2 + 3\alpha - 2)i = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0 \dots\dots ① \\ -\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0 \dots\dots ② \end{cases}$

由① $\Rightarrow (2\alpha+1)(\alpha-2) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ 或 2；由② $\Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow (\alpha-1)(\alpha-2) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ 或 2，可得 $\alpha = 2$ ，選(5)。

3. 因為 $\frac{y+1}{x+3} = \frac{y-(-1)}{x-(-3)}$ ，所以可以視為求 (x, y) 與 $(-3, -1)$ 的斜率。又其可行解區域如右圖

可知最大值為 $\frac{7+1}{0+3} = \frac{8}{3}$ ，選(3)。



4. $X \sim B(100, \frac{1}{10})$ ，由二項分布的公式得知期望值為 $E(X) = np = 100 \times \frac{1}{10} = 10$

變異數為 $\text{Var}(X) = np(1-p) = 100 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 9$ ；標準差為 $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3$ ，則 $\alpha = 10$ 、 $\beta = 3$ ， $10\alpha + \beta = 103$ ，選(4)。

5. 如右圖，可知三角形區域在 L_1 右方、 L_2 右方、 L_3 左方，選(5)。

6. 遊戲甲：

x	2	3	4	5	6
p(x)	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{3}{3^2}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{1}{3^2}$

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{3}{9} + 5 \times \frac{2}{9} + 6 \times \frac{1}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\text{Var}(X) = (2-4)^2 \times \frac{1}{9} + (3-4)^2 \times \frac{2}{9} + (4-4)^2 \times \frac{3}{9} + (5-4)^2 \times \frac{2}{9} + (6-4)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

遊戲乙：

y	3	4	5
p(y)	$\frac{1}{C_2^3}$	$\frac{1}{C_2^3}$	$\frac{1}{C_2^3}$

$$E(Y) = 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4; \text{Var}(Y) = (3-4)^2 \times \frac{1}{3} + (4-4)^2 \times \frac{1}{3} + (5-4)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{選(1)(2)(5)}$$

7. $\because \omega$ 為 $x^3 - 1 = 0$ 的根 $\therefore \omega^3 = 1, 1 + \omega + \omega^2 = 0$ (1)(2)(3)正確

$$\begin{aligned} (4) \text{ 左式} &= (2 + 5\omega + 2\omega^2) - (1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + 1)(1 + \omega)(1 + \omega^2) \\ &= (2 + 5\omega + 2\omega^2) - (1 + \omega)(1 - \omega - 1)(2)(1 + \omega)(1 - \omega - 1) = (2 + 5\omega + 2\omega^2) - 2\omega^2(1 + \omega)^2 \\ &= (2 + 5\omega + 2\omega^2) - 2\omega^2(1 + 2\omega + \omega^2) = 2 + 5\omega + 2\omega^2 - 2\omega^2 - 4 - 2\omega = 3\omega - 2 \end{aligned}$$

(5) 令 $S = 1 - \omega + \omega^2 - \omega^3 + \dots + \omega^{2025} \dots\dots\dots ①$

$$\omega S = \omega - \omega^2 + \omega^3 + \dots - \omega^{2025} + \omega^{2026} \dots\dots\dots ②$$

$$① + ② (1 + \omega) S = 1 + \omega^{2026} \text{ 可得 } S = \frac{1 + \omega}{1 + \omega} = 1 \text{ 綜合以上得(1)(2)(3)(5)正確}$$

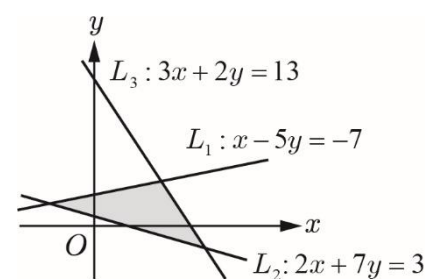
8. (1) 題目未說明 a 為實數 (2) 三根之和為 $-\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$ (3) 正確 (4) 應為 $-5-4i$ (5) 正確

A. $|z^4| = |z|^4 = (\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2})^4 = 16$

B. 設 $z = a + bi$ 其中 a, b 為實數，則 $z^2 = (a^2 + 2abi - b^2) = -5 + 12i \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \dots\dots ① \\ 2ab = 12 \dots\dots ② \end{cases}$ 由② $b = \frac{6}{a}$ 代入①

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = -5 \Rightarrow a^4 + 5a^2 - 36 = 0 \Rightarrow (a^2 - 4)(a^2 + 9) = 0 \Rightarrow a = \pm 2 (a^2 + 9 \neq 0) \text{ 可得 } \begin{cases} a = 2, b = 3 \\ a = -2, b = -3 \end{cases}$$

故 $z = 2 + 3i$ 或 $-2 - 3i$



C. 設其他 4 枚同值硬幣每枚之值為 x 元，則從袋中一次取出 2 枚硬幣之總值可能為 10 元、 $5+x$ 元、 $2x$ 元，其所對應的機率分別為

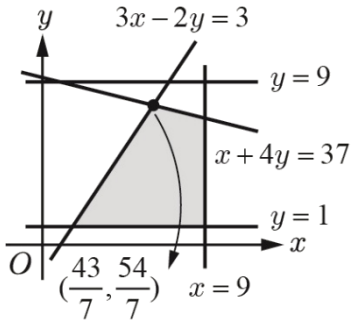
2 枚硬幣之總值	10	$5+x$	$2x$
機率	$\frac{C_2^5}{C_2^9}=\frac{5}{18}$	$\frac{C_1^5C_1^4}{C_2^9}=\frac{5}{9}$	$\frac{C_2^4}{C_2^9}=\frac{1}{6}$

因此，期望值為 $10\times\frac{5}{18}+(5+x)\times\frac{5}{9}+(2x)\times\frac{1}{6}=6\Rightarrow x=\frac{1}{2}=0.5$ (元)

D. 目標函數的極值發生在邊界或頂點，由題意可知最大值發生在邊界上，故邊界上的點皆可得到最大值

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+8b+2=40 \\ 7a+6b+2=40 \end{cases} \text{ 整理得 } \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases} .$$

E. 設個位數為 x 、十位數為 y ，根據題意可列不等式 $\begin{cases} 3x-2y\geq 3 \\ x+4y\leq 37 \\ 9\geq x\geq 0 \\ 9\geq y\geq 1 \end{cases}$ ，由不等式作圖如右



F. 因此，當 $y=7$ ，則 $\frac{17}{3}\leq x\leq 9$ ，得最大的二位數為 79。

甲. 設第一種機器購買 x 臺、第二種購買 y 臺，則年利潤為 $5x+8y$

$$\text{由題意列式為 } \begin{cases} 2x+5y\leq 100 \\ 45x+30y\leq 1500 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} , \text{ 作不等式的圖形，如右圖}$$

在頂點 $(\frac{300}{11}, \frac{100}{11})$ 附近找整數點 (25,10)、(27,9)、(28,8)

可得到數值如下表

頂點	(25,10)	(27,9)	(28,8)
$5x+8y$	205	207	204

可知第一種買 27 臺、第二種買 9 臺，有最高年利潤 207 萬

$$\text{乙. (1) } \frac{C_2^2+C_2^3+C_2^5}{C_2^{10}}=\frac{14}{45}$$

$$(2) \ E(1)=\frac{1}{10}(2000\times 2+1000\times 3+0\times 5)=700 \ , \ E(2)=2E(1)=2\times 700=1400$$

$$(3) \ \left(1-\frac{14}{45}\right)\times\frac{C_1^1\times C_1^8}{C_2^9}=\frac{62}{405}$$

(4)

牌面金額	2000×2	1000×2	0×2	$2000+1000$	$2000+0$	$1000+0$
機率	$\frac{C_2^2}{C_2^{10}}=\frac{1}{45}$	$\frac{C_2^3}{C_2^{10}}=\frac{3}{45}$	$\frac{C_2^5}{C_2^{10}}=\frac{10}{45}$	$\frac{C_1^2\times C_1^3}{C_2^{10}}=\frac{6}{45}$	$\frac{C_1^2\times C_1^5}{C_2^{10}}=\frac{10}{45}$	$\frac{C_1^3\times C_1^5}{C_2^{10}}=\frac{15}{45}$
主持人 加碼後	3000×2 $+1000\times 3$ $+0\times 5$	3000×2 $+2000\times 2$ $+1000+0\times 5$	3000×2 $+2000\times 2$ $+1000\times 3+0\times 3$	5000 $+2000$ $+1000\times 2+0\times 5$	5000 $+2000$ $+1000\times 3+0\times 4$	5000 $+2000\times 2$ $+1000\times 2+0\times 4$

由上表知，重抽後的獎金期望值為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{45}\times\left(\frac{10000}{10}\times 2\right)+\frac{3}{45}\times\left(\frac{11000}{10}\times 2\right)+\frac{10}{45}\times\left(\frac{13000}{10}\times 2\right) \\ & +\frac{6}{45}\times\left(\frac{9000}{9}\times 2\right)+\frac{10}{45}\times\left(\frac{10000}{9}\times 2\right)+\frac{15}{45}\times\left(\frac{11000}{9}\times 2\right) \\ & =\frac{11000}{45}+\frac{638000}{405}=\frac{947600}{405}=\frac{189520}{81} \end{aligned}$$