

新竹市新竹高中 114 上高二第一次期中考 2A(理)

一、多選題 (占 18 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

1. 設 x, y, z 均為不等於 1 的正數。請問下列關於指數、對數這兩種運算的敘述，哪些是正確的？

(1) $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a (xy)$

(2) $\log_a (x + y) = \log_a x + \log_a y$

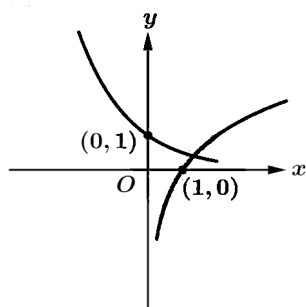
(3) $\log_a (x^y) = y \log_a x$

(4) $\frac{\log_x a}{\log_y a} = \log_x y$

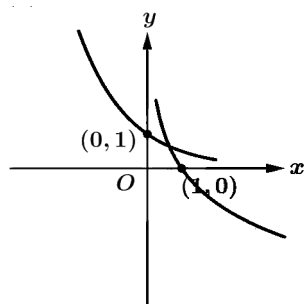
(5) 若 $a^x = y$ ，則 $a = y^{\frac{1}{x}}$

2. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，下列哪些選項可能是函數 $y = \log_a x$ 與 $y = a^{-x}$ 的圖形？

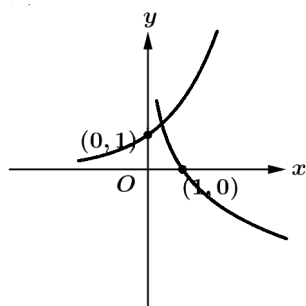
(1)



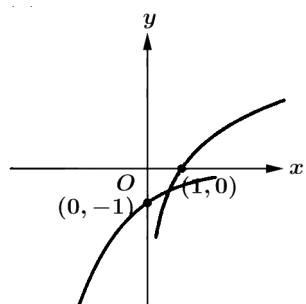
(2)



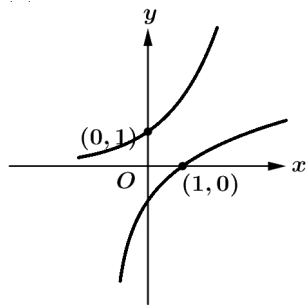
(3)



(4)



(5)



3. 設 $a > 1 > b > 0$ ，關於下列不等式，選出正確的選項：

(1) $(-a)^7 > (-a)^9$

(2) $b^{-9} > b^{-7}$

(3) $\log_{10} \frac{1}{a} > \log_{10} \frac{1}{b}$

(4) $\log_a 1 > \log_b 1$

(5) $\log_a b \geq \log_b a$

二、填充題（占 72 分）

說明：第 4 題至第 15 題，每題 6 分。

4. 解不等式 $2^{x+1} + 2^{2-x} - 6 < 0$ 為【 】。

5. 求 $\left(\log_2 7 + \log_4 \frac{1}{7}\right) \left(\log_7 2 + \log_{49} \frac{1}{8}\right)$ 的值為【 】。

6. 解不等式 $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 1$ 為【 】。

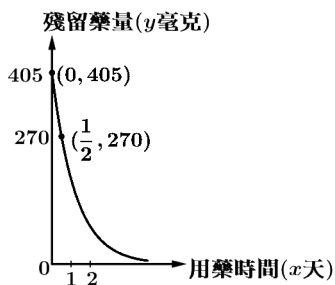
7. 坐標平面上，直線 $x + y = 6$ 與 $y = 2^x$ 、 $y = \log_2 x$ 的圖形分別交於 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 兩點，則數對 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ 【 】。

8. 若 $10^{0.6}$ 介在兩連續整數 n 和 $n + 1$ 之間，則 $n =$ 【 】。

9. 求 $2^{106} + 3^{66}$ 是【 】位數字。

10. 已知正整數 n 滿足 2^n 是一個最高位數字為 2 的 12 位數，求 n 的值為【 】。

11. 右圖為某種農藥在農作物上的單位面積之殘留藥量 (y 毫克) 與用藥時間 (x 天) 的關係圖。設其關係為指數函數 $y = k \cdot a^x$, k 是常數。若單位面積之殘留藥量小於 50 毫克方可食用, 則用藥【 】天才可以食用。(所求為整數天)



12. 解方程式 $4(4^x + 4^{-x}) - 12(2^x + 2^{-x}) + 13 = 0$ 為【 】。
13. 設 $a = \log_2 3$, $b = \log_3 11$, 將 $\log_{66} 99$ 用 a, b 表示為【 】。
14. 設 $a > b > 1000$, $p = \sqrt{\log_{0.7} a \times \log_{0.7} b}$, $q = \frac{1}{2}(\log_{0.7} a + \log_{0.7} b)$, $r = \log_{0.7} \left(\frac{a+b}{2} \right)$ 。試比較 p, q, r 三數的大小關係為【 】。
15. 根據統計資料, 在 A 小鎮當某件訊息發布後, t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1 - 2^{-kt})\%$, 其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息, 假設在發布後 3 小時之內已經有 70% 的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時, 有 99% 的人口已聽到該訊息, 則 T 的值約為【 】。(四捨五入至小數點以下第一位)

三、計算題 (占 10 分)

說明：第 16 題。

16. 設 $\frac{1}{10} \leq x \leq 1000$, 請求出 $f(x) = 3^{\log x} \cdot x^{\log 3} - 18 \cdot 3^{\log(\sqrt{10}x)}$ 之最大值與最小值, 並問產生最大值、最小值之 x 各為何?

參考答案

1. 345 2. 13 3. 12

4. $0 < x < 1$

5. $-\frac{1}{4}$

6. $\frac{1}{4} < x < 1$

7. (6, 6)

8. 3

9. 33

10. 38

11. 3

12. $x = \pm 1$

13. $\frac{2a + ab}{1 + a + ab}$

14. $p > q > r$

15. 11.5

16. $x = \frac{1}{10}$ 時，最大值為 $\frac{1}{9} - 6\sqrt{3}$ ； $x = 100\sqrt{10}$ 時，最小值為 -234