

作答注意事項

1. 請在答案卷上使用黑色原子筆以清晰之字跡作答，以免影響閱卷結果。
2. 請在答案卷上書寫班級、座號、姓名，未正確填寫者扣總分 5 分。
3. 本次考試不能使用計算機，若拿出計算機則視為試場違規行為。

二年_____班_____號

姓名：_____

一、 單選題 (每題 5 分，共 20 分)

1. 已知 $\begin{bmatrix} 2a+b & 3c+2d \\ c-2d & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 17 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ ，試問 $a+b+c+d = ?$

- (1) 8 (2) 9 (3) 10 (4) 11 (5) 12

2. 設向量 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 、 $\vec{c} = (c_1, c_2)$ 、 $\vec{d} = (d_1, d_2)$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{d} = 3$ 、 $\vec{c} \cdot \vec{d} = 4$ ，試問下列選項何者正確？

(1) $\begin{bmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

3. 已知二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 及 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，試問下列何者為 A 的反方陣？

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 15 & -5 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

4. 已知 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ ，試問 $a+2d = ?$

- (1) 1 (2) 3 (3) 4 (4) 8 (5) 9

二、 多重選擇題 (每題 6 分，錯 1 個選項得 4 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項以上或未作答得 0 分，共 18 分)

5. 請問下列哪些矩陣有反方陣？

(1) $\begin{bmatrix} 20 & 0.3 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3^{-1} & 4 \\ 2^{-1} & 6 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 28 & 7 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 112 & 114 \\ 113 & 115 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 210 & 175 \\ 168 & 140 \end{bmatrix}$

6. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ， I 為二階單位方陣，請問下列選項何者正確？

(1) $a+b+c+d=-4$ (2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $A^2 = 3A - 2I$ (5) $A \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

7. 已知 A 、 B 均為二階方陣，且反方陣皆存在， I 為二階單位方陣。若 $AB = BA$ ，且 $A^2 = 4I$ ，則下列選項何者正確？

(1) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ (2) A, B 互為反方陣 (3) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (4) $B^{-1}A^{-1}BA = I$ (5) $(ABA)^2 = 16B^2$

三、 填充題（每格 6 分，共 48 分）

8. 已知 a, b, c, d 為實數。若 $a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 8 \\ 12 & -4b \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d =$ _____。

9. 設 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ ，若 $4X - 2A + B = 2X + A$ ，則 $X =$ _____。

10. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & a \end{bmatrix}$ 滿足 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ，則 $a =$ _____。

11. 為了確保資訊安全傳輸，小綠設計了一種加密系統，加密方式為：把發送的數字串 $X : abcd$ 寫成 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的形式，

為了加密，先左乘矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ ，再左乘矩陣 $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$ ，會得到密文 Y 。

現在已知接收方得到的密文是 $\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 33 \end{bmatrix}$ ，則原文數字串 $X : abcd$ 為_____。

12. 設 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $B = PAP^{-1}$ ，且 $B^9 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $d =$ _____。

13. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ，若 $A^{100} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a+b-c-d =$ _____。

14. 設 A 、 B 均為二階方陣，且 $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 。若 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ，且 $B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，其中 x, y 為實數，則 $x+y =$ _____。

15. 在坐標平面上，若滿足 $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的圖形為斜率為負的直線，其中 k 為實數，則此直線的斜率為_____。

四、混合題（共 14 分）

16-18 題為題組

在數位文書軟體中，文字的不同樣式是透過平面上的線性變換來計算並繪製而成的（如「斜體」）。

假設字體設計師在坐標平面上建立了一個標準體的大寫英文字母「I」，其外框可視為一個矩形 $OABC$ ，其中左下角為原點 $O(0,0)$ ，右下角為 $A(2,0)$ ，右上角為 $B(2,6)$ 。為了設計出搭配的「斜體字」，軟體透過一個二階方陣 T 將整個字體外框作線性變換。已知變換後，貼齊基準線的底邊 $\overline{OA}$ 位置保持不變，而右上角的頂點 $B(2,6)$ 變換到了 $B'(4,6)$ 。試回答下列問題。

16. [單選題，4 分] 已知此字體外框的變形是由二階方陣 T 將圖形作線性變換對應而得，根據上述題意，下列何者為 T ？

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. [填充題，5 分] 承上題，設計師在標準體字母的內部設計了一個「單箭頭符號」，可以向量 $\overrightarrow{u} = (5,3)$ 來表示，

若經由二階方陣 T 對應到斜體字母後形成新向量 $\overrightarrow{u'}$ ，則 $\overrightarrow{u'} =$ _____。

18. [填充題，5 分] 若使用者在軟體中將字體改成斜體後，覺得不滿意，故按下了「復原鍵 (Ctrl+Z)」。

在數學上，這相當於乘上一個新的二階方陣 M ，將斜體的坐標重新變換回標準體。請問此二階方陣 $M =$ _____。

~~ 試題結束 ~~

臺北市立第一女子高級中學 114 學年度第二學期 期末考 高二數學 B 答案卷

二年_____班_____號 姓名：_____

一、 單選題（每題 5 分，共 20 分）

1	2	3	4

二、 多重選擇題（每題 6 分，錯 1 個選項得 4 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項以上或未作答得 0 分，共 18 分）

5	6	7

三、 填充題（每格 6 分，共 48 分）

8	9	10	11
12	13	14	15

四、 混合題（共 14 分）

16（單選題）	17（填充題）	18（填充題）

臺北市立第一女子高級中學 114 學年度第二學期 期末考 高二數學 B 答案卷

二年_____班_____號 姓名：_____

一、 單選題（每題 5 分，共 20 分）

1	2	3	4
3	5	2	4

二、 多重選擇題（每題 6 分，錯 1 個選項得 4 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項以上或未作答得 0 分，共 18 分）

5	6	7
14	45	1345

三、 填充題（每格 6 分，共 48 分）

8	9	10	11
8	$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}$	5	0629
12	13	14	15
1538	7	50	-2

四、 混合題（共 14 分）

16（單選題）	17（填充題）	18（填充題）
4	(6,3)	$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$