

高雄市高雄女中 114 上高二第二次期中考

一、多選題（占 28 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 7 分。

1. 關於指數與對數的圖形，試問下列敘述中哪些選項正確？

- (1) $1.1^x = 2x$ 有實根
- (2) 方程式 $3^{|x|} = x^2$ 有 4 個相異實根
- (3) $2^{47} + 2^{153} < 2^{101}$
- (4) $\log_2 50 + \log_2 50 < 2\log_2 51$
- (5) $y = \pi^x + \pi^{-x}$ 的圖形對稱於 y 軸

2. 設 $1 < a < b$ ，且 $x > 0$ ，下列敘述哪些正確？

- (1) 若 $x > 1$ ，則 $\log_a x < \log_b x$
- (2) 若 $x > 1$ ，則 $\log_a x > \log_b x$
- (3) 若 $0 < x < 1$ ，則 $\log_a x > \log_b x$
- (4) 若 $0 < x < 1$ ，則 $\log_a x < \log_b x$
- (5) $\log_a \sqrt{3} + \log_a \sqrt{5} > \log_a \left(\frac{4 + \sqrt{15}}{2} \right)$

3. 考慮函數 $f(x) = 9^x$ 與 $g(x) = \log_9 x$ ，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $f(x) = 9^x$ 之圖形先以 x 軸為基準上下伸縮 5 倍得到的圖形為 $y = 9^{x+\log_9 5}$

(2) $g(x) = \log_9 x$ 之圖形先向左平移 9 單位得到的圖形為 $y = (\log_9 x) + 1$

(3) 若 P 、 Q 為 $y = f(x)$ 的圖形上兩相異點，則直線 PQ 的斜率必為正數

(4) 若 R 、 S 為 $y = g(x)$ 的圖形上兩相異點，則直線 RS 的斜率必為負數

(5) 若直線 $y = \frac{1}{5}x$ 與 $y = g(x)$ 的圖形沒有交點，則直線 $y = 5x$ 與 $y = f(x)$ 的圖形也沒有交點

1

4. 關於指數和對數的性質，試問下列敘述中哪些選項正確？

(1) $\log_2 4\sqrt{5} = 2.5$

(2) $\log_2 x^3 = 3 \log_2 x$

(3) $\log_2 x^{100} = 100 \log_2 x$

(4) $4^x + 2^{x+1} + 1 = 0$ 有實數解

(5) 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則 $a^{\log_a \pi} = \pi$

二、填充題（占 72 分）

說明：第 5 題至第 19 題。															
題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得分	6	12	18	24	30	36	42	47	52	57	60	63	66	69	72

5. 已知函數 $f(x) = 2(2^{2x} + 2^{-2x}) - 6(2^x + 2^{-x}) + 10$ ，

試求 $f(x)$ 的最小值為【 】。

6. 若 $\log_{\sqrt{2}} x = 2$ ，試求 $\log_{\sqrt{2}}(x+6) =$ 【 】。

7. 將 $a = (0.6)^{100} + 3 \times 10^{-22}$ 表示成小數後，若從小數點以下數下去發現第一個不為 0 的數字為【 】。

8. 當 $x > 1$ 時，使求此不等式 $\log x - 6 \log_x 10 > 1$ 的解為【 】。

9. 設方程式 $2^{1-2x} - 33 \times 2^{-x-2} + 1 = 0$ 的兩根為 a 、 b ，求 $a + b =$ 【 】。

10. 設 a 為正整數，若兩直線 $x=3$ 和 $x=4$ 分別與 $y=a^x$ 的圖形交於 A 、 B 兩點且 $\overline{AB}=\sqrt{65}$ ，試問 $a=$ 【 】。

11. 若自然數 n 滿足 $\log_7(\log_{10} n) = 2$ ，試問 n 為 a 位數，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 解不等式： $(3^x - 9)(\log_2 x - 3)\left(2^x - \frac{1}{2}\right) \leq 0$ ，得 x 的範圍為【 】。

13. 已知 a 和 b 為正整數，且 $\log(a-3)$ 與 $\log(4-b)$ 的算術平均數為 $\log \sqrt{5}$ ，求數對 (a, b) 為【 】。

14. 已知現有 10 株乳酸菌，且每經過 1 小時乳酸菌的數量會增加 3 倍。若以這樣的速度增殖，則最少經過【 】小時之後，乳酸菌的數量會超過 10^{10} 株。
($\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771$) (取至整數位)

15. 設 a 、 b ，為 $1, 2, 3, 4, \sqrt{2}$ 中的任一數字 (可以相同也可以相異)，則對數 $\log_a b$ 共有【 】個相異數值。

16. 方程式 $(3^x - 9)^3 + (9^x - 63)^3 = (9^x + 3^x - 72)^3$ 的三根為 x_1, x_2, x_3 ，且 $x_1 + x_2 + x_3 = \log_9 m$ ，若將 m 表示為標準分解式為 $2^a \times 3^b \times 7^c$ ，則 $a + b + c$ 的值為【 】。

17. 若 x 為實數且函數 $y = f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$ ，將 $y = f(x)$ 對 $y = x$ 作對稱圖形得到 $y = f_1(x)$ ，再將此圖形 $y = f_1(x)$ 往右平移 a 單位圖形得到 $y = f_2(x)$ ， $y = f_2(x)$ 再將繼續往上平移 $\log_{\frac{1}{3}} 4$ 單位得 $f_3(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 4)$ ，且 $x > 4$ ，試問 a 的值為【 】。

18. 設對數方程式 $\log x^3 + 3x - 12 = 0$ ，的實根為 a ；指數方程式 $10^x = 4 - x$ 的實根為 β ，則 $10^\beta + \log a$ 的值為【 】。

19. 在坐標平面上，水平線 $y = k$ 與 $y = 3^x$ 圖形、 $y = 3^{x+1}$ 的圖形分別交於 A 、 B 兩點，過點 A 的鉛直線與 $y = 3^{x+1}$ 圖形交於點 C ，過點 B 的鉛直線與 $y = 3^x$ 圖形交於點 D ，已知四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\frac{16}{3}$ ，則 k 的值為【 】。

參考答案

1. 145 2. 24 3. 135 4. 125

5. 2

6. 6

7. 3

8. $x > 1000$

9. 1

10. 2

11. 50

12. $2 < x < 8$

13. (8, 3)

14. 15

15. 12

16. 13

17. 3

18. 4

19. 4

6