

請正確劃記班級、座號、科目代碼，若未劃記或劃記錯誤或未寫姓名，扣 5 分。

一、單選題(每題 6 分，占 12 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 下列何者為極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3-3x-x^2|-1}{x-1}$ 的值？
(1) 0 (2) -1 (3) -2 (4) 5 (5) 不存在

2. 求無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 之值為下列哪一個選項？
(1) $-0.\bar{2}$ (2) -0.2 (3) $-0.\bar{6}$ (4) -0.6 (5) $-0.\bar{5}$

二、多選題(每題 8 分，占 40 分，計分方式：8-6-4-0)

說明：第 3 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；恰答錯 1 個選項者，得 6 分；恰答錯 2 個選項者，得 4 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

3. 已知 $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ， $f_2(x) = f(f(x))$ ，且對正整數 $n \geq 2$ ， $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ 。試選出正確的選項。

- (1) $f_2(x)$ 是一個二次多項式
(2) $f_3(x)$ 的常數項是 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 1$
(3) $f_4(x)$ 的最高次項係數是 $\left(\frac{2}{3}\right)^4$
(4) $f_4(1) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 1$
(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 3$

4. 有一實數數列 $\langle a_n \rangle$ ，其中 $a_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ ， n 為正整數。試選出正確的選項。

- (1) $a_1 = \frac{-1}{2}$
(2) $a_{114} = a_{2025}$
(3) $\sum_{k=1}^{2025} a_k = \frac{-1}{2}$
(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$
(5) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^k = \frac{-1}{3}$

5. 設 p 為正整數，已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$ ，例如當 $p=2$ 時， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$ ，試選出正確的選項。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}$

(2) $\sum_{k=1}^n k^6$ 的展開式中 n^7 的係數為 $\frac{1}{7}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^5}{n^5} = \frac{1}{6}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} k^4}{n^5} = \frac{2}{5}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n} k^6}{n^7} = \frac{128}{7}$

6. 假設兩數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，對所有正整數 n 都滿足 $b_n + \frac{3n+1}{n} < a_n < \frac{8}{5}b_n$ 。已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 8$ ，試選出正確的選項。

(1) $b_n < 8 - \frac{3n+1}{n}$

(2) $b_n > \frac{15n+5}{3n}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$

(4) $a_{2025} < 8.1$

(5) $a_{10} > 8.2$

7. 設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{|x|}{x}$ 存在，試選出正確的選項。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{114x}} \right)^2$ 存在

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(2x) \frac{2x}{|2x|}$ 存在

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - x) \frac{x}{|x|}$ 存在

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(2x)$ 存在

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^2$ 存在

三、選填題(每題 6 分，占 48 分)

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號。

2.每格完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 令多項式 $2(x+1)^n$ 除以 $(3x-2)^n$ 所得餘式的常數項為 r_n ，求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ 的值 = ⑧。

B. 已知首項為 a ，公比為 r 的無窮等比級數和等於 5；首項為 a ，公比為 $3r$ 的無窮等比級數和等於 7，則首項為 a ，公比為 $2r$ 的無窮等比級數和 = $\frac{\textcircled{9}\textcircled{10}}{\textcircled{11}}$ 。(化成最簡分數)

C. 某人每一回合皆擲二顆相異骰子，若擲出之點數和為 9 點時，則可得獎金 10 元，並得繼續投擲之權利。若第二回合又擲出點數和為 9 點，則又可得獎金 10 元，並得繼續投擲，如此一直繼續下去，求此人獲得獎金之期望值 = $\frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13}}$ 元。(化成最簡分數)

D. 設 $f(x)$ 為三次多項式，若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2n)}{n^3} = \frac{\textcircled{14}\textcircled{15}}{\quad}$ 。

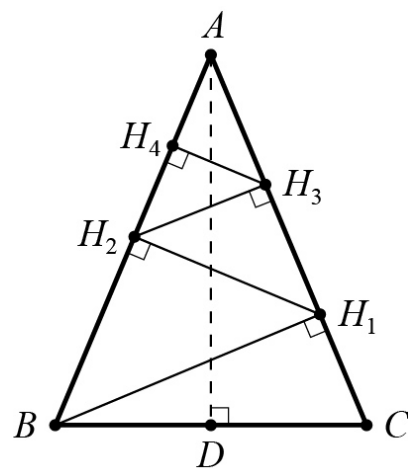
E. 設 α, β 為 $x^2 + x - 4 = 0$ 的二根，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha^n + \beta^n} = \frac{\textcircled{16}\textcircled{17}\textcircled{18}\sqrt{\textcircled{19}\textcircled{20}}}{2}$ 。(化成最簡根式)

尚有試題

F. 設 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 5$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^3 - x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x^4) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - x^4) =$ ②①②②

G. 設函數 $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x < -1 \\ ax-1, & -1 \leq x < 2 \\ bx^2+9, & x \geq 2 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在實數 R 上為連續函數, 試求右極限 $\lim_{x \rightarrow b^+} [ax]$ 之值為 ②③②④。(其中 $[x]$ 為高斯函數)

H. 已知等腰三角形如圖所示, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BC} = 1$, 先從 B 向 $\overline{AC}$ 作垂線 $\overline{BH_1}$, 再從它的垂足 H_1 向 $\overline{AB}$ 作垂線 $\overline{H_1H_2}$, 依此繼續作下去, 若這些無窮多個垂線段的長度總和 $(\overline{BH_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{H_nH_{n+1}})$ 為 $\frac{78}{25}$, 則 ΔABC 的面積為 $\frac{②⑤}{②⑥}$ 。(化成最簡分數)



試題結束

市立臺中一中 114 學年度第一學期 第一次期中考 高三數學甲 參考答案

一、單選題(每題 6 分，共 12 分)

1. (4)

2. (2)

二、多選題(每題 8 分，共 40 分，8—6—4—0 分)

3. (2)(3)(4)(5)

4. (1)(3)(5)

5. (1)(2)(5)

6. (2)(3)(5)

7. (1)(2)(3)(5)

三、選填題(每題 6 分，共 48 分)

A. 2

B. $\frac{35}{6}$

C. $\frac{5}{4}$

D. 24

E. $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

F. 14

G. 17

H. $\frac{3}{5}$