

臺北市立第一女子高級中學 114 學年度第一學期第一次期中考 題目卷

科目：數學 年級：高一 頁數：題目卷 3 頁、答案卷 1 頁

1. 所有答案請有理化分母，並化成最簡分數、最簡根式表達之。
2. 本次測驗不開放使用計算機。
3. 常用對數近似值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$ 。

一、多選題（占 20 分，每題 10 分，每個選項 2 分）

1. 請問下列敘述哪些正確？
 - (1) $1.\overline{234} > 1.2\overline{34}$
 - (2) $\frac{329}{990}$ 的小數點後第 2025 位是 2
 - (3) 若 a^8 和 a^{13} 都是有理數，則 a 一定是有理數
 - (4) 任兩個相異有理數間都可以找到無限多個有理數
 - (5) 無理數在四則運算下都有封閉性

2. 在數線上有給定的五點 $O(0)$ 、 $U(1)$ 、 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C\left(\frac{2a+3b}{5}\right)$ ，其中 $0 < a < b$ ，且 a, b 為有理數。請問下列敘述哪些正確？
 - (1) C 會在 $D\left(\frac{3a+5b}{8}\right)$ 的左邊
 - (2) $E\left(\frac{3a+4b}{8}\right)$ 會落在 A 和 B 之間
 - (3) $F\left(\frac{13a-5b}{8}\right)$ 會落在 A 的左邊
 - (4) 若 P 點為 A 和 B 的內分點，且滿足 $\overline{AP}:\overline{PB} = 2:3$ ，則 C 點即為 P 點。
 - (5) $\sqrt[8]{ab}$ 的位置可以使用尺規作圖作出

二、填充題（占 54 分，每題 6 分）

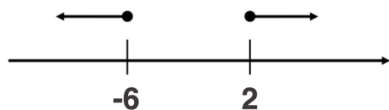
3. 若 $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3}} \div \left(a^{\frac{3}{2}} \div a^{\frac{4}{3}}\right)^2 = a^n$ ，其中 $a > 0$ ，則 $n =$ _____

4. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1} =$ _____

5. $\sqrt{2025 + \sqrt{2025 + \sqrt{2025}}}$ 的整數部分為 _____

6. 若 3^{100} 可表示為 10^a ，且為 b 位數，則數對 (a, b) 為 _____
(請以常用對數形式來表示 a)

7. 若絕對值不等式 $|-3x + a| \geq b$ 的解範圍如下圖，則數對 (a, b) 為 _____



8. 某人測得 A 星球的質量約為 1.99×10^{30} 公斤， B 星球的質量約為 5.97×10^{24} 公斤，則 A 星球的質量約是 B 星球的 _____ 倍。(請表示成科學記號，並取三位有效數字。)

9. 某科學家在培養皿中養細菌，這種細菌的數量每過 12 小時就會增加 a 倍。他觀察在開始培養的 4 天後，細菌群有 1280 隻；開始培養的 6.5 天後，細菌群有 40960 隻。則最初培養皿內的細菌有 _____ 隻。

10. 若 $a = 3^{50}$ ， $b = 5^{40}$ ， $c = 7^{30}$ ，則 a, b, c 的大小關係為 _____

11. $||x - 2| - |x + 1|| = x$ 的解為 _____

三、計算證明題（占 26 分）

12. 令 $x = 9 - \sqrt{80}$ ，試求

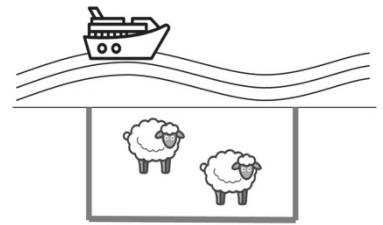
(1) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ 的值。（4 分）

(2) $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ 的值。（6 分）

13. 如下圖所示，大綠想用木柵欄（粗線部分）在臨河的一片草地圍出一塊 1800 平方公尺的長方形牧場（靠河的一側不需要柵欄），以飼養羊群，請問：

(1) 她至少需要準備幾公尺的木柵欄？（4 分）

(2) 此時長方形牧場的長和寬分別是多少？（6 分）



14. 請利用 $\sqrt{3}$ 不是有理數，以及有理數的封閉性，來證明 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ 不是有理數。（6 分）

臺北市立第一女子高級中學 114 學年度第一學期數學科第一次期中考 答案卷

高一 _____ 班 _____ 號 姓名：_____

1. 所有答案請有理化分母，並化成最簡分數、最簡根式表達之。
2. 本次測驗不開放使用計算機。
3. 常用對數近似值： $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$, $\log 7 \approx 0.8451$ 。

一、多選題（占 20 分，每題 10 分，每個選項 2 分）

1.	2.

二、填充題（占 54 分，每題 6 分）

3.	4.	5	6.	7.

8.	9.	10.	11.

三、計算證明題（占 26 分）

12.	
(1) (4 分)	(2) (6 分)
13.	
(1) (4 分)	(2) (6 分)
14. (6 分)	

臺北市立第一女子高級中學 114 學年度第一學期數學科第一次期中考 答案卷

高一 _____ 班 _____ 號 姓名：_____

- 所有答案請有理化分母，並化成最簡分數、最簡根式表達之。
- 本次測驗不開放使用計算機。
- 常用對數近似值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$ 。

一、多選題（占 20 分，每題 10 分，每個選項 2 分）

1.	2.
(2)(3)(4)	(1)(3)(5)

二、填充題（占 54 分，每題 6 分）

3.	4.	5	6.	7.
$\frac{5}{6}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	45	$(\log 3^{100}, 48)$	$(-6, 12)$

8.	9.	10.	11.
3.33×10^5	5	$a < c < b$	$x = 3, 1, \frac{1}{3}$

三、計算證明題（占 26 分）

12.	
(1) (4 分) $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9 - \sqrt{80}} = \sqrt{9 - 2\sqrt{20}} = \sqrt{5} - 2$ $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5} - 2 + \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$ $= \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} + 2 = 2\sqrt{5}$	(2) (6 分) $(2) x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)(x - 1 + x^{-1})$ $= (2\sqrt{5})\left(9 - \sqrt{80} - 1 + \frac{1}{9 - \sqrt{80}}\right)$ $= (2\sqrt{5})(9 - \sqrt{80} - 1 + 9 + \sqrt{80})$ $= (2\sqrt{5})(17) = 34\sqrt{5}$
13.	
(1) (4 分) 令長方形的長寬分別為 $a, b \Rightarrow ab = 1800$ ；木柵欄長度為 $2a + b$ 根據算幾不等式， $\frac{2a+b}{2} \geq \sqrt{(2a)(b)} =$ $\sqrt{2 \times 1800} = \sqrt{3600} = 60$ 因此木柵欄長度 $2a + b \geq 2 \times 60 = 120$ ，即最短為 120 公尺。	(2) (6 分) 當等號成立時， $2a = b = 60$ $\Rightarrow a = 30, b = 60$ 。
14. (6 分)	
利用反證法，設 $\sqrt{6} + \sqrt{2} = k$ 為有理數， 則 $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 8 + 4\sqrt{3} = k^2$ ， $\sqrt{3} = \frac{k^2 - 8}{4}$ ，根據有理數在四則運算下的封閉性， $\frac{k^2 - 8}{4}$ 為一有理數，與 $\sqrt{3}$ 為無理數矛盾，故 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ 應為無理數	