

台北市師大附中 114 上高二第一次期中考

一、單選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 5 分。

1. 下列選項何者為正確？

(1) $5^{-\log_5 3} = -3$

(2) $\log_{(-3)} 9 = 2$

(3) $\log \left(1 - \sqrt{3}\right)^2 = 2 \log \left(1 - \sqrt{3}\right)$

(4) $(\log_2 3)^5 = 5 \log_2 3$

(5) $\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$

2. 下列哪一個方程式恰有兩實根？

(1) $2^x = x^2$

(2) $\log_2 |x| = x - 1$

(3) $|\log_2 x| = x - 2$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = \frac{1}{10}$

(5) $\log_2 x = -2^x$

3. 指數方程式 $2^{10^x} = 10^6$ 的解 x 最接近下列哪一個選項？

(1) 1.3

(2) 1.4

(3) 1.5

(4) 1.6

(5) 1.7

4. 設 $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$, $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 2$, $d = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 則 a, b, c, d 之大小順序為何?

- (1) $b > d > c > a$
- (2) $d > b > c > a$
- (3) $b > d > a > c$
- (4) $d > b > a > c$
- (5) $d > c > b > a$

二、多選題 (占 24 分)

說明：第 5 題至第 7 題，每題 8 分。(8-5-3-0)

5. 設 a 為大於 1 的實數，考慮函數 $f(x) = a^x$ 與 $g(x) = \log_a x$ ，則下列哪些敘述正確？

- (1) 函數 $y = f(x+2)$ 與 $y = g(x) - 2$ 對稱於 $x - y = 0$
- (2) $y = g(x)$ 與任何一條鉛直線 $x = k$ 都會有一個交點

(3) $\frac{g(2024) + g(2026)}{2} > g(2025)$

(4) $\frac{f(2026) - f(2024)}{2026 - 2024} > \frac{f(24) - f(20)}{24 - 20}$

- (5) 若直線 $y = 3x$ 與 $y = f(x)$ 的圖形有兩個交點，
則直線 $y = -3x$ 與 $y = g(x)$ 的圖形也有兩個交點

6. 已知 $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則下列哪些敘述正確？

- (1) 若 $\log x = 15.7$ ，則 x 為 15 位數
- (2) 若 $\log x = -15.7$ ，則 x 小數點後第 16 位不為 0
- (3) 已知 $\log 20.3 \approx 1.3075$ ，若 $\log x = -3.6925$ ，則 $x = 0.00203$
- (4) 若 $\log_a x$ 與 $\log_a y$ 之尾數相同，則存在整數 k 使得 $y = x \cdot a^k$
- (5) 若 $\log_a x$ 的尾數不為 0，則 $\log_a x$ 的尾數與 $\log_a \frac{1}{x}$ 的尾數和為 0

7. 自然常數 $e = 2.718\cdots$ 為一個定值。已知 $a = e^{\frac{1}{e}}$ ，且 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的函數圖形恰有一個交點。則下列哪些敘述正確？

(1) $0 < a < 1$

(2) (e, e) 為其交點

(3) 對於任意實數 $x > 0$ ，不等式 $a^x \geq \log_a x$ 一定恆成立

(4) $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 會有兩個交點

(5) 當 $b > e^{\frac{1}{e}}$ 時， $y = b^x$ 與 $y = \log_b x$ 有可能不只有一個交點

三、填充題（占 48 分）

說明：第 8 題至第 15 題，每題 6 分。

8. 化簡： $\log 10\sqrt[3]{10} - (3^{\log_7 2})^{\log_3 7} + \log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \underline{\textcircled{8-1}} \underline{\textcircled{8-2}}$ 。

9. 已知 $x = \log_2 3$ ，則 $8^x + 2^{-x} = \frac{\underline{\textcircled{9-1}} \underline{\textcircled{9-2}}}{\underline{\textcircled{9-3}}}$ 。

10. 若 $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ ，則 $f(x) = 16x^{(1+\log_2 x)}$ 最大值為 $= \underline{\textcircled{10-1}} \underline{\textcircled{10-2}} \underline{\textcircled{10-3}} \underline{\textcircled{10-4}}$ 。

11. 設 $a = \log_2 5$ ， $b = \log_3 2$ ，則 $2^{a+\frac{3}{b}+1} = \underline{\textcircled{11-1}} \underline{\textcircled{11-2}} \underline{\textcircled{11-3}}$ 。

12. 若芮氏規模 M 是以地震儀測得地震的波幅， E 是地震所釋放出的能量，而 M 與 E 之關係為 $M = \log_{32} \frac{E}{a}$ ，其中 a 為常數。1999 年台灣 921 大地震發生芮氏規模 7.3 的地震，2008 年 5 月 12 日四川的汶川發生芮氏規模 8.0 的地震，兩次地震皆傷亡慘重。試問汶川地震釋放出的能量是台灣 921 地震釋出能量的

$\underline{\textcircled{12-1}} \underline{\textcircled{12-2}} \underline{\textcircled{12-3}}$ 倍。

13. 若 $\log 2 = a$ ， $\log 3 = b$ ，請利用 a 與 b 來表示

$$\log 180 = \underline{(13-1)} + \underline{(13-2)}a + \underline{(13-3)}b。$$

$$14. \log \frac{4}{5} - \frac{5}{2} \log \sqrt[5]{16} - 2 \log \sqrt{2} = \underline{(14-1)} \underline{(14-2)}。$$

15. 滿足 $-1 \leq \log_{\frac{1}{3}}(\log_3 x) < 0$ 的整數有 $\underline{(15-1)} \underline{(15-2)}$ 個。

四、填充題（占 8 分）

說明：第 16 題，每題 8 分。

16. 解對數不等式 $\log_{(x+1)}(-x^2 + 2x + 3) > 2$ 得 x 的範圍為何？

参考答案

1. 5 2. 4 3. 1 4. 2

5. 14 6. 24 7. 23

8. -2

9. $\frac{82}{3}$

10. 1024

11. 270

12. $2^{3.5}$

13. $1 + a + 2b$

14. -1

15. 24

16. $0 < x < 1$