

台北市立第一女子高級中學 114 學年度 第一學期

高三數學甲考科第二次期中考題目卷

參考公式： X 為二項分布， $X \sim B(n, p)$ ，則 X 的期望值 $E(X) = np$ ， X 的標準差 $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

一、單一選擇題（每題 7 分，共 28 分）

1. 已知拋物線 $y = x^2 - x + 1$ 上一點 $A(2, 3)$ ，則下列何者為點 A 到拋物線焦點的距離？

- (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{3}{2}$ (5) $\frac{5}{2}$

2. 已知 $\Gamma_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ， $\Gamma_2: \frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ ，則 Γ_1 、 Γ_2 兩圖形共有多少個交點？

- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 4 (5) 無窮多個

3. 綠園校慶愛心園遊會活動，一項支持尼泊爾學童餐費抽獎活動，獎品為 SKZOO 娃娃，參加此活動先付 200 元可投公正硬幣 5 次，若 5 次都正面可得一個 SKZOO 娃娃；若投 4 次正面，再付 400 元可獲得一個 SKZOO 娃娃；其餘狀況需再付 800 元才可獲得一個 SKZOO 娃娃。若隨機變數 X 為獲得一個 SKZOO 娃娃所需付的金額，則下列何者最接近隨機變數 X 的期望值？

- (1) 200 (2) 400 (3) 800 (4) 900 (5) 1000

4. 設 $P(x, y)$ 在 $\Gamma: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上，則有多少個點 P 滿足 $\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ 為整數？

- (1) 2 (2) 7 (3) 12 (4) 14 (5) 無窮多個

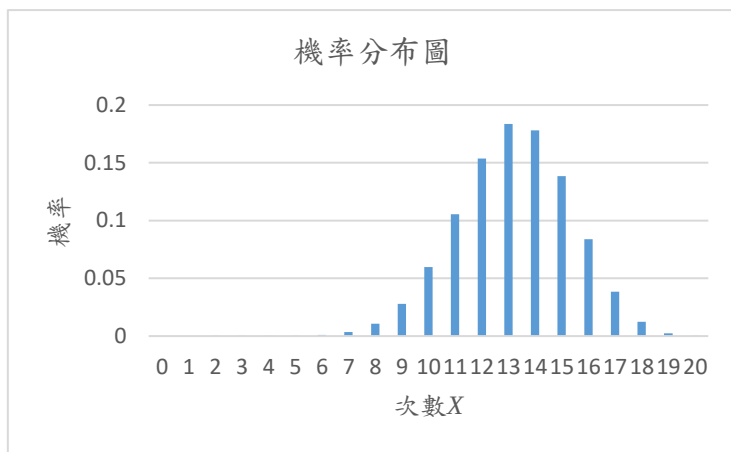
二、多重選擇題（每題 10 分，共 40 分）

5. 已知 $\Gamma: 25x^2 + 16y^2 = 400$ ，則下列哪些圖形與 Γ 有相同的焦點？

- (1) $x^2 + y^2 = 400$ (2) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$ (3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$ (4) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{2} = -1$
(5) $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 0$

6. 右圖為隨機變數 X 的機率分布圖，已知 $X \sim B(20, p)$ ，則下列哪些選項正確？

- (1) $0.6 < p < 0.7$
- (2) 機率 $P(X = 0) = 0$
- (3) 機率 $P(X \geq 13) \geq 0.5$
- (4) 期望值 $E(X) = 13$
- (5) 標準差 $\sigma(X) > 2.5$ 。



7. 下列哪些選項恰可唯一決定一拋物線？

- (1) 以 x 軸為準線，焦點是 $(-1, 1)$
- (2) 以 x 軸為準線，焦點是 $(0, 1)$ ，且通過 $(2, 2)$
- (3) 過 $(1, 1)$ 、 $(3, 2)$ 、 $(4, -2)$ 三點
- (4) 對稱軸為直線 $x - 2 = 0$ ，且通過 $(8, 4)$ 、 $(-4, 3)$
- (5) 以 x 軸為準線，且過 $(-3, 12)$ 、 $(9, 3)$

8. 圓 $C: x^2 + y^2 = 16$ 經過 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ 映射後成為 $\Gamma: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，其中 $a, b > 0$ ，若圓 C 與 Γ 在第一象限交

點為 P ，直線 $\overline{OP}$ 與 X 軸正向的夾角為 θ ，則下列哪些選項正確。

- (1) $a = 5$
- (2) $b = \frac{3}{4}$
- (3) 點 P 的坐標為 $(5 \cos \theta, 3 \sin \theta)$
- (4) $\theta < 45^\circ$
- (5) 已知圓上動點 $Q(4 \cos \alpha, 4 \sin \alpha)$ 經過 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ 映射後為點 Q' ，則 $\overline{QQ'} = 1$ 。

三、填充題(每題 7 分，共 28 分)

9. 已知 X 為一隨機變數，變異數 $\text{Var}(3X + 5) = 27$ ，則標準差 $\sigma(-2X)$ 為_____。

10. 一橢圓與 $\Gamma: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 有相同的焦點 F_1 、 F_2 。若橢圓上有一點 P 使得 $\triangle PF_1F_2$ 為一正三角形，求此橢圓的長軸長為_____。
11. 假設棒球高手小谷在任一局發生失誤的機率都等於 p （其中 $0 < p < 1$ ），且各局之間發生失誤與否互相獨立。令隨機變數 X 代表一場比賽9局中出現失誤的局數，且9局中恰有 k 局出現失誤的機率為 $P(X = k)$ 。已知 $P(X = 1) = P(X = 2)$ ，則小谷在一場9局的比賽中出現失誤局數的期望值為_____。
12. 在坐標平面上，點 $A(-1, 0)$ ，過 $F(1, 0)$ 的直線交拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ 於 P 、 Q 兩點，設 $\angle PAQ = 2\theta$ ，且 $\frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} = 4$ ，則 $\tan \theta$ 的值為_____。

四、混合題(共12分)

小明週末進行山路長距離訓練，某段山路空拍經過擬合近似雙曲線，他建立坐標找出雙曲線的漸近線為 $3x - 4y = 0$ 和 y 軸，且記得山路上一點 $A(9, 8)$ 。試由此資訊回答下列問題。

13. 下列何者為此雙曲線的貫軸方程式？(單選：4分)
- (1) $x = 0$ (2) $y = 0$ (3) $4x + 3y = 0$ (4) $2x - y = 0$ (5) $x + 2y = 0$
14. 小明想得到更多此雙曲線的資訊，因此得將此雙曲線旋轉成標準式： $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ，試求 a^2 和 b^2 ，請詳細寫出求解過程。(計算題：8分)。

台北市立第一女子高級中學 114 度 第一學期

高三數學甲考科第二次期中考 答案卷

班級：三年_____班 座號：_____ 姓名：_____

*總分超過 100 分時，則以 100 分計。

一、單選題（每題 7 分，共 28 分）

1.	2	3.	4.
(5)	(1)	(4)	(3)

二、多重選擇題（每題 10 分，共 40 分）(每個選項 2 分)

5.	6.	7.	8.
(3)(4)	(1)(3)	(1)(5)	(2)(4)(5)

三、填充題(每題 7 分，共 28 分)

9	10	11	12
$2\sqrt{3}$	8	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{5}$

四、混合題(共 12 分)

13. (4) (單選題)(4 分)

14.：計算題(請寫出詳細過程)(8 分)

由上一題得知雙曲線方程式 $x(3x - 4y) = -45$ (2 分)，

貫軸方程式為 $2x - y = 0$ ，所以逆時針旋轉 θ ， $\tan \theta = \frac{1}{2}$ (2 分)，

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{代入 } x(3x - 4y) = -45, \text{ 得 } \frac{y^2}{45} - \frac{x^2}{\frac{45}{4}} = 1$$

$$\text{即旋轉後為 } \frac{y^2}{45} - \frac{x^2}{\frac{45}{4}} = 1, \text{ 所以 } a^2 = 45, b^2 = \frac{45}{4}. \quad (2 \text{ 分})$$

