

市立臺中一中 114 學年度第一學期第一次期中考高三數學乙試題

滿分 100 分，得分超過 100 分時以 100 分計算。請將答案填至答案卷。

一、單選題(每題 6 分，共 30 分。)

() 1. 試求出 $0.\overline{323}$ 的值為 (1) $\frac{323}{999}$ (2) $\frac{323}{990}$ (3) $\frac{32}{99}$ (4) $\frac{291}{900}$ (5) $\frac{8}{225}$

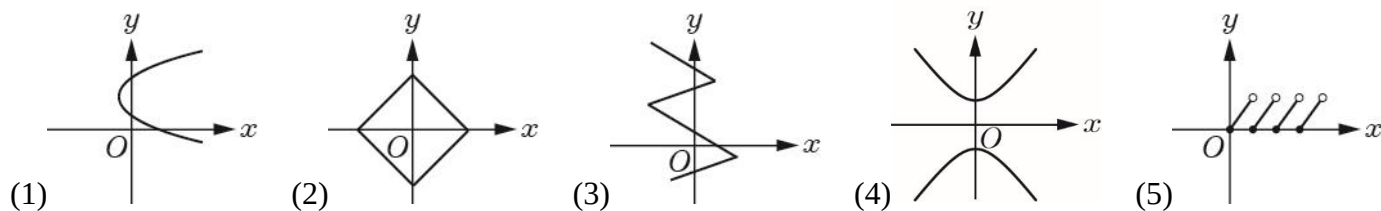
() 2. 求出 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 4x - 5} =$ (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{5}{6}$ (3) $\frac{6}{7}$ (4) 2 (5) 極限不存在

() 3. 已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中，首項 $a_1 = -1$ ，前 n 項和為 S_n ，若 $\frac{S_5}{S_{10}} = \frac{32}{31}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 之值為

(1) $-\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $-\frac{2}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$ (5) 1

() 4. 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + cn}{bn^2 + c} = 3$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn + c}{cn + a} = 4$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + c}{cn^2 + an - b} =$ (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{4}{3}$ (4) 12 (5) 81

() 5. 下列各圖形中何者是函數圖形？



二、多選題(每題 8 分，共 32 分。)

() 6. 設 $x \in \mathbb{R}$ ， $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，則下列敘述何者正確？

(1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 2$ (2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$ (3) $\lim_{x \rightarrow 2^+} x[x] = 2$ (4) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]}{x} = 1$ (5) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{2} = 1$

() 7. 下列數列何者為收斂數列？

(1) $\left\langle 1 + \frac{n}{5} \right\rangle$ (2) $\left\langle 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$ (3) $\left\langle \frac{(-1)^n + 1^n}{2} \right\rangle$ (4) $\left\langle \frac{3^n}{2^{2n+2}} \right\rangle$ (5) $\left\langle \frac{1}{2n-1} \right\rangle$

() 8. 若 $f(x) = x + 2$ 、 $g(x) = x^2 + x$ ，則下列敘述何者正確？

(1) $(f \circ g)(1) = 4$ (2) $(g \circ f)(1) = 12$ (3) $(f \circ f)(4) = 4$ (4) $(g \circ g)(1) = 8$ (5) $(g \circ g)(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$

市立臺中一中 114 學年度第一學期第一次期中考高三數學乙試題

() 9. 下列關於函數極限的敘述，試選出正確的選項。

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ 及 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 皆存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 及 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 皆存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 及 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 皆存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。

(4) 若 c 為常數且 $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x)$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。

(5) 若函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處連續，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。

三、填充題(每題 6 分，共 36 分。)

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} + 2^{n+1} - 1}{6^n} = \underline{\hspace{2cm}}$

B. 已知 a, b 為實數，且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+1} - b}{x-1} = \sqrt{2}$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$

C. 設 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3}, & x \neq -3 \\ a, & x = -3 \end{cases}$ ，已知 $f(x)$ 為連續函數，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

D. 已知 $f(x)$ 為三次多項式，且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = 1$ 、 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = 4$ ，則 $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$

市立臺中一中 114 學年度第一學期第一次期中考高三數學乙試題

E. 已知無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 中的每一項都滿足 $2n+3 < na_n < 2n+5$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____

F. 在坐標平面上， $L: \sqrt{3}x - y = 0$ ，由 $A_1(2, 0)$ 作 L 之垂線，其垂足為 B_1 ，再由 B_1 向 x 軸作垂線，其垂足為 A_2 ，

再由 A_2 作 L 之垂線，其垂足為 B_2 ，以此類推，可得 $A_3, B_3, A_4, B_4, \dots$ ，試求 $\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \overline{A_3B_3} + \dots$ 之和為 _____

四、證明題(8 分，請在答案卷上留下完整證明過程，只有答案未有過程者，不給分。)

已知多項式函數 $f(x) = x^2(x-1)^2 + 3x - 2$ ，試說明在方程式 $f(x) = 0$ 在 $(1, 2)$ 之間至少有一個實根。

五、加分題(共 10 分)

已知實數 $a > 1$ ，試說明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 。(提示：取數列 $b_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ ，再利用夾擠定理說明 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$)

市立臺中一中 114 學年度第一學期第一次期中考高三數學乙答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____ 得分：_____

滿分 100 分，得分超過 100 分時以 100 分計算。

一、單選題(每題 6 分，共 30 分。)

1.		2.		3.		4.		5.	
----	--	----	--	----	--	----	--	----	--

二、多選題(每題 8 分，共 32 分。全對得 8 分，錯 1 個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個以上選項得 0 分。)

6.		7.		8.		9.	
----	--	----	--	----	--	----	--

三、填充題(每題 6 分，共 36 分。)

A.		B.		C.	
D.		E.		F.	

四、證明題(8 分，請在答案卷上留下完整證明過程，只有答案未有過程者，不給分。)

已知多項式函數 $f(x)=x(x-1)^2+3x-2$ ，試說明在方程式 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 之間至少有一個實根。

五、加分題(共 10 分)

已知實數 $a>1$ ，試說明 $\lim_{n\rightarrow\infty}\sqrt[n]{a}=1$ 。(提示：取數列 $b_n=\sqrt[n]{a}-1>0$ ，再利用夾擠定理說明 $\lim_{n\rightarrow\infty}b_n=0$)

市立臺中一中 114 學年度第一學期第一次期中考高三數學乙參考答案

1. (3) 2. (2) 3. (3) 4. (4) 5. (5) 6. (2)(4) 7. (2)(4)(5) 8. (1)(2)(5) 9. (1)(3)(5)

A. $\frac{17}{15}$ B. $(4, 4\sqrt{2})$ C. -6 D. -10 E. 2 F. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

證明題：

已知 $f(x)$ 為 3 次多項式函數，所以 $f(x)$ 為連續函數。

又 $f(0) = -2$ 、 $f(1) = 1$ ，所以，由中間值定理知，至少存在一個 c 介於 $(0, 1)$ 之間，使 $f(c) = 0$ ，

即 c 為 $f(x) = 0$ 的實根。

加分題：

令 $b_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ ，則 $a = (1 + b_n)^n = C_0^n + C_1^n b_n + C_2^n (b_n)^2 + \cdots + C_n^n (b_n)^n > C_1^n b_n = n b_n$ ，從而得到 $0 < b_n < \frac{a}{n}$ 。

因為 $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$ ，所以由夾擠定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 。