

市立臺中一中 114 學年度第一學期第二次期中考 高三數學甲試題

臺中市立臺中第一高級中等學校試場規則：

科目代碼：03

十二、答案卷（卡）應書寫正確之座號、姓名並正確劃記，違者該科扣 10 分。

第壹部分、選擇(填)題(占 87 分)

一、單選題(每題 6 分，共 12 分)

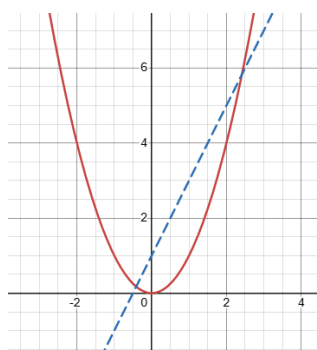
說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，劃記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 6 分；未作答、答錯或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $f(x)$ 為可微分函數且 $f(\frac{1}{x+1}) = x$ ，則 $f'(3)$ 之值為_____。

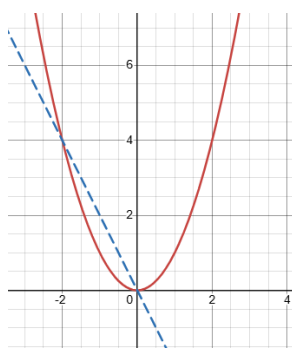
- (1) $-\frac{10}{9}$ (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) 1 (5) -9

2. 小明利用數學軟體 desmos 將 $y = f(x)$ 及其一階導函數 $y = f'(x)$ 的圖形同時畫在座標平面上，實線代表 $y = f(x)$ 的圖形，虛線代表 $y = f'(x)$ 的圖形。請問下列哪一個選項的圖形是正確的？_____

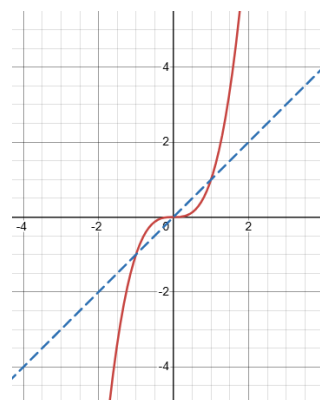
(1)



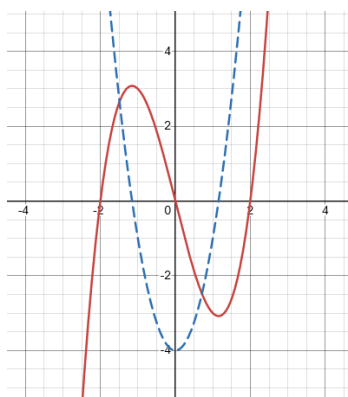
(2)



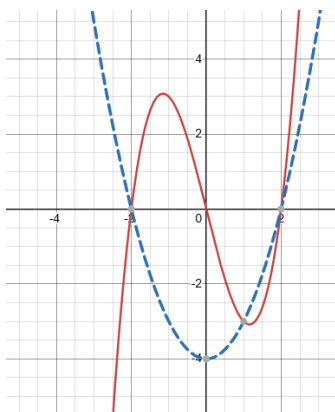
(3)



(4)



(5)



二、多選題(每題 7 分，共 21 分)

說明：第 3 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有 1 個是正確的選項，選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 7 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 3 分；答錯 3 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯 4 個以上選項者，該題以零分計算。

3. 考慮多項式函數 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$ 。試選出正確的選項。
- (1) 函數 f 的圖形在點 $(2, f(2))$ 的切線斜率為正
 - (2) 函數 f 的唯一相對極小值為 -32
 - (3) $f(x)$ 在 $x = 2$ 處的一次近似為 $y = -9x - 5$
 - (4) $f(x)$ 在區間 $(5, \infty)$ 內為遞增
 - (5) $f(x)$ 在區間 $(-\infty, 3)$ 內凹口向上
4. 以下哪些條件可確定 $(2, f(2))$ 為三次多項式函數 $y = f(x)$ 的反曲點？
- (1) $f''(2) = 0$
 - (2) $\int_1^3 f''(x) dx = 0$
 - (3) $\int_1^3 f'(x) dx = 0$
 - (4) $\int_1^3 f(x) dx = 0$
 - (5) $f'(x)$ 在 $x = 2$ 有極值
5. 若 $f(x) = |x|$ ， $g(x) = \frac{1}{2}x|x|$ ， $h(x) = \frac{1}{3}x^2|x|$ ，試選出正確的選項。
- (1) $f(x)$ 在 $x = 0$ 不可微分
 - (2) $g(x)$ 在 $x = 0$ 可微分
 - (3) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的導函數
 - (4) $h(x)$ 是 $g(x)$ 的反導函數
 - (5) 存在可微分函數 $H(x)$ ，微分後恰為 $h(x)$

還有下一張試題，請繼續作答

三、選填題(每題 6 分，共 54 分)

說明：第 A 題至第 I 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (⑥ ~ ⑳) 。每題完全答對得 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 $f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$ ，求 $f'(1) = \frac{\textcircled{6}\textcircled{7}}{\textcircled{8}}$ 。(化為最簡分數)

B. 若多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f(1)=0$ ， $f'(1)=7$ ，求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{3h} = \frac{\textcircled{9}}{\textcircled{10}}$ 。(化為最簡分數)

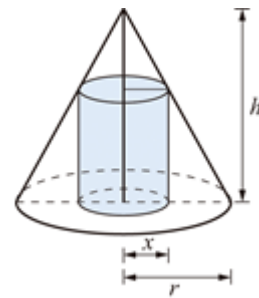
C. 設多項式 $f(x) = x^{10} + 2x^2 - 5x + 3$ ，若 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $px+q$ ，試求序對 $(p, q) =$
(⑪ , ⑫⑬)

D. 若多項式函數 $f(x) = x^3 - 12x + a$ 的圖形和 x 軸恰有三相異交點，則 a 的範圍為
⑭⑮⑯ $< a <$ ⑰⑱

E. 若 $f(a) = \int_0^a |x|(x-2)dx$ ，則 $f(a)$ 的最小值為 $\frac{\textcircled{19}\textcircled{20}}{\textcircled{21}}$ 。(化為最簡分數)

- F. 設一直圓錐高 h 為 10，底半徑 r 為 5，有一直圓柱內接於此直圓錐，如圖所示，令直圓柱之底半徑為 x ，若直圓柱之體積為 $f(x)$ 。

試求直圓柱之最大體積 = $\frac{\textcircled{22}\textcircled{23}\textcircled{24}\textcircled{25} \pi}{\textcircled{26}\textcircled{27}}$ 。(化為最簡分數)



- G. 設 $f(x) = x(x-a)(x-b)$ ，其中 $a < -1 < 0 < b < 3$ ，若 $\int_{-1}^3 f(x) dx = 4$ ， $\int_{-1}^3 |f(x)| dx = 12$ ，則

$$\int_0^b f(x) dx = \underline{\textcircled{28}\textcircled{29}}。$$

- H. 若 $f(x)$ 為一多項式函數，已知 $\int_1^3 f(x) f'(x) dx = 0$ 且 $\int_1^3 (f(x))^2 f'(x) dx = 18$ ，則

$$\int_1^3 (f(x))^4 f'(x) dx \text{ 之值為 } \underline{\frac{\textcircled{30}\textcircled{31}\textcircled{32}}{\textcircled{33}}}。$$
 (化為最簡分數)

- I. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - \left(\frac{n+k}{n}\right)^2}$ 之值為 $\underline{\frac{\textcircled{34} \pi}{\textcircled{35}} - \frac{\sqrt{\textcircled{36}}}{\textcircled{37}}}$ 。(化為最簡分數、最簡根式)

還有下一張試題，請繼續作答

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

第貳部分、混合題或非選擇題(占 13 分)

本答題卷請繳回

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 6 分，非選擇題配分標於題末。
單選題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (㉔)
非選擇題限在答題卷標示題號的作答區內作答。
非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

J-K 題為題組

若二曲線 $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$ 在 $x = a$ 相交且有相同的切線，則稱 $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$ 在 $x = a$ 相切。

已知實係數三次多項式函數 $y = f(x)$ 和圓 $\Gamma: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 相切於 $O(0,0)$ 、 $A(3,1)$ 兩點，試回答下列問題：

- J. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 之值為下列何者？ ㉔ (單選題，6 分)
- (1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) $-\frac{1}{2}$ (5) -2
- K. 試求此三次多項式函數 $f(x)$ ，並以降冪表示。(非選擇題，7 分)

題號	作 答 區
K	

試題結束

市立臺中一中 114 學年度第一學期第二次期中考 高三數學甲 參考答案

第壹部分、選擇(填)題(占 87 分)

一、單選題(每題 6 分，共 12 分)

1.(2) 2.(4)

二、多選題(每題 7 分，共 21 分)(7-5-3-1-0)

3.(2)(4) 4.(1)(2)(5) 5.(1)(2)(3)(5)

三、選填題(每題 6 分，共 54 分)

A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{7}{3}$ C. (9, -8) D. $-16 < a < 16$ E. $-\frac{4}{3}$ F. $\frac{1000\pi}{27}$ G. -4
H. $\frac{486}{5}$ I. $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$

第貳部分、混合題或非選擇題(占 13 分)

J. (4) (6 分) K. $f(x) = \frac{5}{54}x^3 - \frac{1}{2}x$ (7 分)

K. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (1 分)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{由 J 得, } c = f'(0) = -\frac{1}{2} \quad (1 \text{ 分})$$

$$d = f(0) = 0 \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{又過 (3,1) 的切線斜率為 } -\frac{\frac{1}{1-2}}{3-1} = 2$$

$$\therefore f'(3) = 27a + 6b + c = 2, \text{ 即 } 27a + 6b = \frac{5}{2}$$

$$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 1, \text{ 即 } 27a + 9b = \frac{5}{2}$$

$$\text{解 } \begin{cases} 27a + 6b = \frac{5}{2} \\ 27a + 9b = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ 得 } a = \frac{5}{54}, b = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{5}{54}x^3 - \frac{1}{2}x \quad (1 \text{ 分})$$