

臺北市立第一女子高級中學 114 學年度第一學期第一次期中考 高三數學甲 試題

註：滿分 105 分。總分超過 100 分者，以 100 分計；班級、座號等欄位劃記錯誤者，扣 10 分。

以 $\bar{z}$ 代表複數 z 的共軛複數。

一、單選題（28 分）

說明：每題答對者得 7 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者得 0 分。

1. 已知 $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$ 為複係數多項式方程式 $x^2 - 6x + k = 0$ 的一根，試問此多項式方程式的另一根為下列哪個選項？

- (1) $-1 + \sqrt{3}i$ (2) $1 - \sqrt{3}i$ (3) $-1 - \sqrt{3}i$ (4) $7 - \sqrt{3}i$ (5) $5 - \sqrt{3}i$

2. 複數 $\frac{(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)^5 (\sin 140^\circ + i \cos 140^\circ)^2}{(\cos 10^\circ - i \sin 10^\circ)^4}$ 經過化簡後，與下列哪個選項之值相等？

- (1) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (2) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$ (3) $-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$ (4) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (5) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

3. 設 m 為實數，且二次多項式方程式 $x^2 - (m + 3)x + (m + 6) = 0$ 有兩相異負根，則 m 的範圍為下列哪個選項？

- (1) $-6 < m < -3$ (2) $-5 < m < -3$ (3) $-6 < m < -5$ (4) $-3 < m < 3$ (5) $-5 < m < 3$

4. 已知方程式 $2(x - \pi)(x - \sqrt{24})(x - 10) = x$ 有三個實根 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)，且三個整數 a, b, c 滿足

$$a < \alpha < a + 1, b < \beta < b + 1, c < \gamma < c + 1,$$

則 $a + b + c$ 與下列哪個選項之值相等？

- (1) 14 (2) 15 (3) 16 (4) 17 (5) 18

二、多選題（21分）

說明：每題各有五個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判斷，所有選項均答對者，得7分；答錯一個選項者，得4分；答錯兩個選項者，得1分。答錯三個選項以上，及所有選項均未作答者，該題以0分計算。

5. 給定一實係數三次多項式函數 $f(x) = -2x^3 + bx^2 + cx + 3$ 。令 $g(x) = f(-x) - 3$ ，已知圖形 $y = g(x)$ 的對稱中心為 $(1, 0)$ 。試選出正確的選項。

(1) $g(2) = 0$

(2) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心 $(-1, 3)$

(3) $f(x)$ 除以 $x^2 - 2x + 2$ 的餘式為 $20x - 17$

(4) $f(1 + i) = -20 + 3i$

(5) 設實係數多項式 $h(x)$ 除以 $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1)$ 的餘式為 $f(x)$ ，則 $h(1 + i) = 3 + 20i$

6. 設 $z^6 = 64$ 的解為 $2, 2\omega, 2\omega^2, 2\omega^3, 2\omega^4, 2\omega^5$ 。試選出正確的選項。

(1) $|\omega| = 1$

(2) $2 + 2\omega + 2\omega^2 + 2\omega^3 + 2\omega^4 + 2\omega^5 = 64$

(3) $(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})\omega$ 滿足方程式 $x^6 = i$

(4) $x = 2 \cos \frac{13\pi}{12}$ 為方程式 $(x + i \sin \frac{\pi}{12})^6 = 64i$ 的唯一實數解

(5) 設 $k > 0$ ，若方程式 $(x + ki)^6 = 64i$ 有實數解，則所有 k 的可能值總和為 2

7. 設複數 z 的虛部不為 0，且 $|z| = 4$ 。設在複數平面上，點 A, B, C 分別代表複數 $1, z, z^3$ 。已知 A, B, C 三點共線。試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ ，其中 k 為實數

(2) $z(z + 1)$ 的虛部為 0

(3) z 的實部為 $-\frac{1}{4}$

(4) $z(z + 1)$ 的實部為 16

(5) 在複數平面上， $8, z, z^2$ 三點共線

三、填充題（42分）

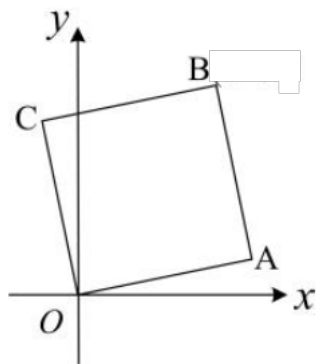
說明：每格答對得7分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 已知複數 $z = \frac{(3+i)^5(4-3i)}{(1+i)^3(1-2i)^7}$ ，則 $|\bar{z}| = \underline{\textcircled{8}}$ 。

B. 若複數 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{114} = a + bi$ ，其中 a, b 為實數，則數對 $(a, b) = \underline{(\textcircled{9}, \textcircled{10})}$ 。

C. 已知 $f(x)$ 為實係數多項式，若 $f(1 + \sqrt{3}i) = 2 + i$ ，且 $\frac{2f(1-\sqrt{3}i)}{1-i} = a + bi$ ，其中 a, b 為實數，則數對 $(a, b) = \underline{(\textcircled{11}, \textcircled{12})}$ 。

D. 如圖，設 O 為複數平面上的原點，已知 $OABC$ 為正方形，其中 B 代表複數 $1 + 3i$ ，若 A 代表複數 $a + bi$ ，其中 a, b 為實數，則數對 $(a, b) = \underline{(\textcircled{13}, \textcircled{14})}$ 。



E. 分別將滿足 $z^8 = i$ 的各根依序相連，則所成圖形的面積為 $\underline{\textcircled{15} \sqrt{\textcircled{16}}}$ （化成最簡根式）

F. 設 k 為實數，已知存在複數 z 滿足聯立方程組：
$$\begin{cases} z - \bar{z} = -2i, \\ |z - 1| = k \end{cases}$$
，則 k 的範圍為 $\underline{k \geq \textcircled{17}}$ 。

四、題組題（14分）

說明：每題答對者得7分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者得0分。

18. 設複數 z_1, z_2 滿足 $|z_1| = |z_1 + z_2| = 2$ ， $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$ ，則 $|z_2| = ?$

- (1) 2 (2) 3 (3) $2\sqrt{2}$ (4) $2\sqrt{3}$ (5) 4

19. 承 18， $\log_2(|(z_1 \overline{z_2})^{114} + (\overline{z_1} z_2)^{114}|) = ?$

- (1) 114 (2) 115 (3) 228 (4) 229 (5) 2025

臺北市立第一女子高級中學 114 學年度第一學期第一次期中考 高三數學甲 試題

註：總分超過 100 分者，以 100 分計；班級、座號等欄位劃記錯誤者，扣 10 分。

一、單選題（28 分）

1.	2.	3.	4.
5	1	3	4

二、多選題（21 分）

5.	6.	7.
12	13	12

三、填充題（42 分）

A.	B.	C.	D.	E.	F.
2	(0, 1)	(3, 1)	(2, 1)	$2\sqrt{2}$	1

四、題組題（14 分）

18.	19.
1	4