

市立臺中一中 114 學年度第一學期 期末考 高三數學甲 試題
科目代碼 03

請於答案卡上正確劃記班級、座號、科目代碼，若未劃記或劃記錯誤，扣 10 分。

一、單選題：共 20 分。

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

- 考慮坐標平面上的直線 $L: 3x + 2y = 6$ 。若 a 為實數且二階方陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -2 \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換可以將 L 上的點變換到一條斜率為 2 的直線，則 a 的值為下列哪一個選項？
(1) -3 (2) -1 (3) 2 (4) 4 (5) 6
- 已知坐標平面上 $\triangle ABC$ 的一頂點 $A(3, 4)$ ，且知過另兩頂點 B 、 C 的中線方程式分別為 $8x + 5y = 27$ 與 $x + 7y = 14$ ，試問過頂點 A 的中線斜率為下列哪一個選項？
(1) $\frac{7}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{7}$ (4) $\frac{-2}{7}$ (5) $\frac{-7}{2}$
- 設 $a \in \{-6, -4, -2, 2, 4, 6\}$ ，已知 a 為實係數三次多項式 $f(x)$ 的最高次項係數，若函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於三點，且其 x 坐標成首項為 -9、公差為 a 的等差數列。試問共有幾個 a 使得 $f(0) > 0$ ？ (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個
- 坐標平面上， x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。試問在函數圖形 $y = \log_2 x$ 、 x 軸與直線 $x = \frac{65}{2}$ 所圍有界區域的內部(不含邊界)共有多少個格子點？
(1) 90 (2) 92 (3) 94 (4) 96 (5) 98

二、多選題：共 32 分。

說明：第 5 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項劃記在答案卡上。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯 3 個選項以上或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

- 設過點 P 的直線 L 與圓 $C: x^2 + y^2 = 4$ 相交於相異兩點 A 、 B ， O 為圓 C 的圓心， $\triangle AOB$ 面積為 a 。求當點 P 可以為下列哪些選項中的坐標，可以使得 a 的最大值 $\leq \sqrt{3}$ ？
(1) $(2, \frac{1}{3})$ (2) $(1, -\sqrt{3})$ (3) $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{3})$ (4) $(\sqrt{3}, \frac{3}{4})$ (5) $(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

6. 現擲一顆公正的骰子(共有 6 種點數：分別為 1,2,3,4,5,6，每一種點數出現的機率皆為 $\frac{1}{6}$)。事件 $A = \{1,2,3\}$ ，事件 B 、 C 與事件 A 為兩兩相異的事件($B \neq A, C \neq A$)，且 $P(B) \neq 0$ 、 $P(C) \neq 0$ 。試選出正確的選項。
- (1) 存在事件 B ，使得 $P(A \cap B) = 0$
- (2) 存在事件 C ，使得 $P(A|C) = P(A)$ (3) 存在事件 B 、 C ，使得 $P(C|B) = \frac{1}{2}$
- (4) 存在事件 C ，使得 $P(A \cap C) = \frac{2}{3}$ (5) 存在事件 B 、 C ，使得 $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
7. 令 Γ 為坐標平面上 $y = \sin \pi x$ 在 $0 \leq x \leq 3$ 內之函數圖形。一水平直線 $L: y = k$ 與 Γ 相交，其中三交點 $P(x_1, k), Q(x_2, k), R(x_3, k)$ 滿足 $x_1 < x_2 < 1 < x_3$ 。試選出正確的選項。
- (1) L 與 Γ 恰有 4 個交點 (2) $x_2 + x_3 \geq 3$ (3) $\overline{QR} < 2$ (4) 若 $3\overline{PQ} = \overline{QR}$ ，則 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- (5) L 與 Γ 所有交點的 x 坐標之和大於 5
8. 某校高三共有 900 位學生，數學科第一次模擬考、第二次模擬考成績分別以 X 、 Y 表示，且每位學生的成績用 0 至 100 評分。若這兩次模擬考數學成績的相關係數為 -0.0011 ，試問下列哪些選項是正確的？
- (1) X 與 Y 的相關情形可以用散佈圖表示
- (2) 兩次模擬考的數學成績適合用直線 $X = aY + b$ 表示 X 與 Y 的相關情形(a, b 為常數， $b \neq 0$)
- (3) $X + 10, Y + 10$ 的相關係數仍為 -0.0011 (4) $5X$ 與 $-5Y$ 的相關係數為 -0.0011
- (5) 若 $X' = \frac{X - \bar{X}}{S_X}, Y' = \frac{Y - \bar{Y}}{S_Y}$ ，其中 $\bar{X}, \bar{Y}$ 分別為 X, Y 的平均數， S_X, S_Y 分別為 X, Y 的標準差，則 X' 與 Y' 的相關係數仍為 -0.0011

三、填充題：共 5 題，每題 6 分，共 30 分

A. 設 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ， $x = 2\cos \theta$ 、 $y = 2\cos 2\theta$ 、 $z = 2\cos 4\theta$ ，且 $x = z^2 - 2$ ，則

$$x^2 + y^2 + z^2 = \underline{\textcircled{9}}。$$

B. 設 $f(x) = (x-2)^3 + 2(x-2) + 2$ ，已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \frac{1}{20}$ ，且對所有的正整數

$$n, a_n = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n}, \text{ 求 } \sum_{k=1}^{79} f(a_k) = \underline{\textcircled{10}\textcircled{11}\textcircled{12}}.$$

C. 在右圖的 4×4 表格中，有兩位男生 B_1 、 B_2 及兩位女生 G_1 、 G_2 ，

每一個格子中至多站一個人，每個人站在每一格的機率相同。若此四人全部皆要站在這 16 格中的其中一格，則男生站在不同行也不同列的格子中且女生也是站在不同行也不同列的格子中(男女

可以在同一行或同一列的格子中)的機率為 $\frac{\textcircled{13}\textcircled{14}}{\textcircled{15}\textcircled{16}}$ 。(化為最簡分數)

D. 已知 A 、 B 、 C 、 D 為平面上的四個點。若 $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長且互相垂

直，則 $\cos \angle BAD = \frac{\textcircled{17}\sqrt{\textcircled{18}\textcircled{19}}}{\textcircled{20}\textcircled{21}}$ 。(化為最簡根式)

E. 坐標空間中有兩條直線 L_1 ， L_2 與一平面 E ，其中直線 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{-5}$ ，而 L_2 的參數

式為 $\begin{cases} x=1 \\ y=1+2t (t \text{ 為實數}) \\ z=1+3t \end{cases}$ 。若 L_1 落在 E 上，且 L_2 與 E 不相交，則原點到平面 E 的距離

為 $\frac{\textcircled{22}\sqrt{\textcircled{23}\textcircled{24}}}{\textcircled{25}\textcircled{26}}$ 。(化為最簡根式)

四、題組：共 3 題，每題 6 分，共 18 分

設函數 $f(x)$ 滿足 $\int_1^x f(t) dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}ax + a$ ，其中 a 為實數，且 $g(x) = x + 3$

F. 求 $f(-1) + f(2) = \underline{\textcircled{27}}$ 。

G. 設 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形所圍成的封閉區域為 R ，則 R 的面積為 $\frac{\textcircled{28}}{\textcircled{29}}$ 。(化為最簡分數)

H. 承 G 題，求 R 繞 x 軸旋轉一圈所得的旋轉體體積為 $\frac{\textcircled{30}\textcircled{31}\textcircled{32}}{\textcircled{33}}\pi$ 。(化為最簡分數)

試題結束

市立臺中一中 114 學年度第一學期 期末考 高三數學甲 試題

參考答案：

一、單選題：

1.(2) 2.(1) 3.(2) 4.(5)

二、多選題

5.(3)(5) 6.(1)(2)(3)(5) 7.(1)(2) (5) 8. (1) (3)(5)

三、填充題

A. 6 B. 158 C. $\frac{33}{91}$ D. $\frac{-\sqrt{10}}{10}$ E. $\frac{5\sqrt{53}}{53}$

四、題組

F. 7 G. $\frac{9}{2}$ H. $\frac{117}{5}\pi$