

市立臺中一中 114 學年度第二學期 期末考 高二數學(A 組) 試題 科目代碼：03

未正確劃記班級、姓名、座號於答案卡者，一律扣 10 分!!

一、單一選擇題：4 分

1. 解二元一次聯立方程組 $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 5x-3y=4 \end{cases}$ 的過程，方程組的增廣矩陣為 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ ，則下列哪一個選項的矩陣乘積代表

『使用加減消去法使方程組的其中一個方程式保持不變，另一個方程式消去 x 項』的步驟？_____

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

二、多重選擇題：每題 7 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 3 分，錯三個選項以上得 0 分。

2. 如圖， O 、 $P(x_1, y_1)$ 、 Q 為正六邊形的頂點，則下列求 Q 點坐標的算式何者正確？_____

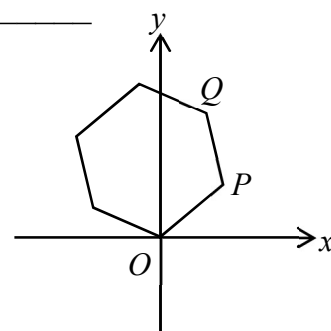
(1) $\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

(5) $\sqrt{3} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$



3. 已知二階方陣 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 、 $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ，下列哪些選項的運算結果是零矩陣 $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ？

- (1) A^{2026} (2) $I_2 + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{113} + A^{114} + A^{115}$ (3) AB (4) $n \in \mathbb{N}$ ， B^{n+1} (5) $C^2 - 8C - 8I_2$

4. 像素 (Pixel) 是組成數位影像的最小基本單位。每個像素就像是一個微小的色彩方塊，無數個不同顏色的像素緊密排列，就組成了我們在螢幕上看到的照片與畫面。而像素能夠顯示的顏色或明暗程度，取決於影像的色彩深度，例如 8-bit 灰階影像 (Grayscale)：範圍為 0~255。0 代表全黑，而 255 代表全白，顏色越深則數值越接近 0。一個

3×3 像素的黑白圖像，其色彩深度按照相對位置表示成一個 3×3 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 226 & 115 & 226 \\ 115 & 26 & 115 \\ 226 & 115 & 226 \end{bmatrix}$ ，經過矩陣的運算後，會

得到新圖像的 3×3 矩陣 B 。試問下列哪些選項的矩陣運算，可使圖像中每個像素點的顏色都加深？_____

(1) $A + \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$

(2) $A - \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 \end{bmatrix} - A$

(4) $A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A$

5. 將拋物線 S 經過一個繞原點順時針旋轉 $\theta = 45^\circ$ 的線性變換 A 後得到曲線 $T: x^2 + 2xy + y^2 - 3\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$ ，則下列敘述那些是正確的？_____

(1) T 的頂點座標為 $(0, -\sqrt{2})$

(2) T 的對稱軸方程式為 $x + y + \sqrt{2} = 0$

(3) T 再經由 A 做變換後為開口向上的拋物線

(4) $A^{115} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(5) S 經由變換 $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}^{2026}$ 後為 $y = x^2 - 2x$

三、選填題：每題 7 分，共 56 分。

A. 設集合 $S = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 5, x \in R, y \in R\}$ 、 $T = \{(x, y) | x = 4a + 3b + 5, y = 2a + b, (a, b) \in S\}$
試求集合 T 所形成的區域面積為 ⑥。

B. 設直線 $L_1: x - 2y = 0$ 經直線 $x - \sqrt{3}y = 0$ 鏡射至直線 L_2 ，接著 Q 點經直線 $x + y = 0$ 鏡射至直線 L_3 ，相當於直線 L_1 繞原點
旋轉 $\frac{⑦}{⑧} \pi$ 弧度得到直線 L_3 。

C. 三階方陣 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^6$ 的第 2 列第 2 行 = ⑨⑩⑪。

D. 已知 a, b 是實數，線性方程組 $\begin{bmatrix} a & ab \\ 1 + \frac{1}{ab} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的解為 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，則方程組 $\begin{bmatrix} -b & ab \\ 1 + \frac{1}{ab} & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的解
 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} ⑫ \\ ⑬⑭ \end{bmatrix}}$ 。

E. 設 a, b 均為實數，已知聯立方程組 $\begin{cases} x - y + az = 5 \\ 3x + 2y + z = b \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$ 有無限多組解，則 $(a, b) = \underline{(⑮, ⑯⑰)}$ 。

F. 印度國王想獎賞發明國際象棋的宰相，宰相只要求在 8×8 棋盤上放麥粒。依照下圖的順序，

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 10 & \cdots \\ 2 & 5 & 9 & \cdots & \cdots \\ 6 & 8 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 7 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

編號 1 格放 1 粒、編號 2 格放 2 粒，編號 3 格放 4 粒，以此類推，每一格的數量是前一編號號碼格的 2 倍。

則第 5 列第 4 行的格子要放 $\overset{\textcircled{19}\textcircled{20}}{\textcircled{18}}$ 粒麥粒。(註：答案是一個指數寫法， $\textcircled{18}$ 是底數， $\textcircled{19}\textcircled{20}$ 是指數。)

G. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 A 中各元的和為 $\textcircled{21}\textcircled{22}\textcircled{23}\textcircled{24}\textcircled{25}$ 。

H. 已知 L 為過原點 O 與 x 軸正向夾角為 θ 的直線，對於點 P 對直線 L 作垂線的垂足 P' 稱為 P 對 L 的投影，已知【對 L 作投影】的作用可表示成一個線性變換 T ，若代表 T 的二階方陣為 M ，且 $M^{2026} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，求 $a - b + c - d$ 之最小值
 = $\textcircled{26}\textcircled{27}$ 。

四、混合題：共 12 分。

『早點到』阿姨長期調查統計，在串生總人數不變動的情形下，串生若今天有買脆薯，則隔天會有 90% 還會買脆薯；若今天沒有買脆薯，則隔天會有 20%買脆薯。假設串生今天買脆薯和不買脆薯的人數占全校串生人數的比例分別為 x_0 、 y_0 ，且 x_n 、 y_n 分別代表 n 個上學日後買脆薯和不買脆薯的人數占全校串生人數的比例。

1. 若 $k \in N \cup \{0\}$ 且 $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ ，則下列哪些選項是正確？②⑧。(3 分)

(1) $a = 0.9$ (2) $c = 0.2$ (3) $a + b = 1$ (4) $b + d = 1$ (5) $c + d = 0.9$ 。

2. 若 $x_0 = \frac{4}{5}$ 、 $y_0 = \frac{1}{5}$ ，則隔 2 個上學日買脆薯的人數占全校串生人數的百分比 = ②⑨⑩ %。(5 分)

3. 若 $\frac{x_0}{y_0} = \frac{x_n}{y_n}$ ，對任意正整數 n 均成立，則 $\frac{x_0}{y_0} =$ ⑩。(4 分)

市立臺中一中 114 學年度第二學期 期末考 高二數學(A 組) 答案

一、單一選擇題：1.(4)

二、多重選擇題：2.(3)(4) 3.(2)(4)(5) 4.(2)(4)(5) 5.(1)(4)(5)

三、選填題：A. 4 B. $\frac{7\pi}{6}$ C. $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ D. (2,20) E. 2^{31} G. 20480 H. -1

四、混合題：1.(1)(4)(5) 2. 76 3. 2