

新竹市竹科實中 114 上高二第二次期中考

一、多選題（占 32 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 8 分。(8-5-2-0)

1. 已知 $\sqrt{2} \approx 1.414$ 、 $\sqrt{3} \approx 1.732$ 、 $\pi \approx 3.141$ ，則下列關於指數與對數的敘述，何者正確？

(1) $(\log_{\pi} 2025)^{\pi} = 2025$

(2) $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_3 \pi} = \frac{1}{\log_6 \pi}$

(3) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{24} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} < \log_9 26$

(4) 若 $a = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ 、 $b = 2^{0.4}$ 、 $c = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ ，則 $b > a > c$

(5) 若 $a = 10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 、 $b = a^{\sqrt{2}}$ ，則 $a^2 < b^{\sqrt{3}}$

2. 設 a 、 b 為兩非零實數，考慮坐標平面上 $\Gamma_1: y = a \cdot 2^x$ 與 $\Gamma_2: y = b \cdot \log_3 x$ 兩圖形，下列哪些選項正確？

(1) 不論 a 為何值， Γ_1 圖形皆為凹口向上

(2) 不論 b 為何值， Γ_2 圖形皆與 y 軸均沒有交點

(3) 可以找到 a 、 b ，使得 Γ_1 與 Γ_2 兩圖形有交點

(4) 可以找到 b 值，使得 Γ_2 圖形與 $y = \log x$ 圖形重合

(5) 可以找到正實數 a ，使得 Γ_1 圖形與 $y = \log x$ 圖形對稱於直線 $y = x$

3. 設 $P(a\pi, b)$ 為兩函數 $y = \log x$ 和 $y = \sin x$ 在區間 $[0, 2\pi]$ 內之交點，其中 π 為圓周率， a 、 b 為實數，試問下列哪些選項正確？

(1) $\frac{1}{2} < a + b < 2$

(2) $(b, a\pi)$ 必為函數 $y = 10^x$ 圖形上一點

(3) $\left(\frac{1}{a\pi}, \frac{1}{b}\right)$ 也為函數 $y = \log x$ 圖形上一點

(4) 若 $c \geq 1$ ，則 $y = \log(x + c)$ 的圖形必不通過第四象限

(5) 函數 $y = \log x - \sin 3x$ 在區間 $[0, 2\pi]$ 內的實根數共有奇數個

4. 下列哪些選項的函數圖形與直線 $y = 3$ 僅相交於 1 個點？

(1) $y = 20^x \cdot 25^x$

(2) $y = \left(\frac{1}{2025}\right)^x + 3$

(3) $y = |\log_{2025} x| + 3$

(4) $y = \log_{2025} |x + 3|$

(5) $y = -3^{2025} + \log_{2025} x$

二、填充題（占 62 分）

說明：第 5 題至第 14 題。										
答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	8	16	24	32	38	44	50	54	58	62

5. 化簡 $\log_3 \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \log_3 \sqrt[3]{6} + \log_3 \frac{1}{9}$ 之值為【 】。

6. 已知 x 為實數且 $3 \leq x \leq 7$ ，求 $2025^{\left(x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right)}$ 的最小值為【 】。

7. 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-5} - 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 8 < 0$ 之解為【 】。

8. 滿足不等式 $(\log_3 x - 1) \left(\log_{\frac{1}{4}} x + 1\right) \left(x^2 + (2 \log 5)x - \log \frac{2}{5}\right) > 0$ 之 x 的範圍為【 】。

9. 設 x 、 y 為兩正實數，且滿足 $x^2 y^3 = \sqrt[3]{10000}$ 及 $2 \log(x^3 y) = 1$ ，則 $\frac{\log y}{\log x} =$ 【 】。

10. 設 $a_n = \frac{n+1}{n}$ ，則 $\frac{1}{\log_{a_1} \sqrt{45}} + \frac{1}{\log_{a_2} \sqrt{45}} + \frac{1}{\log_{a_3} \sqrt{45}} + \frac{1}{\log_{a_4} \sqrt{45}} + \cdots + \frac{1}{\log_{a_{2024}} \sqrt{45}} =$ 【 】。

11. 已知 $x > 1$ ，則 $(\log_3 9x)(\log_x 3x^2)$ 最小值為【 】。

12. 已知正整數 a 、 b 滿足 $(\log a)(\log b) + 3\log a + 2\log b = 12$ 且 $\log_a b = 3$ ，則有序對 $(a, b) =$ 【 】。

13. 已知 $a > 1$ ，且在坐標平面的第一象限有 A 、 B 兩點分別在 $y = a^x$ 及 $y = \log_a x$ 上，使得三角形 OAB 為正三角形，其中 O 為原點。若正三角形 OAB 的邊長為 $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$ ，則 $a =$ 【 】。

14. 某公司為了響應節能減碳政策，決定每年依固定的比率 2% 逐年減少二氧化碳排放量。試問至少要【 】年 (取整數年數) 該公司的二氧化碳排放量才會低於目前排放量的 90%？(參考數值 $\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 7 \approx 0.8451$)

三、計算題 (占 6 分)

說明：第 15 題，每題 6 分。

15. 已知實數 x 滿足 $\log_3(\log_3(\log_3 x)) = 1$ ，其中 x 為 m 位數，且 x 的個位數字是 α ， x 的最高位數字是 β ，試問 m 、 α 、 β 各為何？(參考數值 $\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 7 \approx 0.8451$)

参考答案

1. 235 2. 234 3. 1245 4. 135

5. -3

6. 45

7. $0 < x < 2$

8. $3 < x < 4$

9. 18

10. 4

11. 9

12. (10, 1000)

13. $\sqrt{3} + 1$

14. 6

15. $m = 13, \alpha = 7, \beta = 7$