

正確劃記班級、座號、科目代碼，若未劃記或劃記錯誤，扣 5 分。注意：總分超過 100 分，以 100 分計。

一、單選題（12 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 6 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為兩個不平行的單位向量，若 $\left| \vec{a} + k \vec{b} \right|$ 的最小值發生於 $k = \frac{1}{2}$ ，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$
 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) 0

2. 坐標平面上有兩點， $A(1,1)$ 、 $B(2,3)$ 。點 P 為圓 $C: x^2 + y^2 = 5$ 的動點。設 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影向量為 $\vec{u}$ ，則 $\left| \vec{u} \right|$ 的最大值為何？
 (1) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (2) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (3) $\sqrt{5}$ (4) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ (5) $2\sqrt{5}$

二、多選題（40 分）

說明：第 3 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有 1 個是正確的選項，選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 4 分；答錯 3 個選項者，得 2 分；所有選項均未作答或答錯多於 3 個選項者，該題以零分計算。

3. 設 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 是兩非零向量，若 $\left| \vec{a} \right| = 2 \left| \vec{b} \right| = \left| \vec{a} + 3 \vec{b} \right| = 4$ ，且 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 夾角為 θ ，則下列敘述何者正確？
 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$
 (2) $\cos \theta = -\frac{3}{4}$
 (3) 若 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ，則 $\left| \vec{c} \right| = 2\sqrt{2}$
 (4) 由 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 兩向量張出的行四邊形面積為 $\sqrt{7}$
 (5) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長度為 3

4. 平面上有兩向量 $\vec{u} = (1, 2)$ 、 $\vec{v} = (k, 1)$ ，其中 k 為實數，且 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 兩向量夾角為 θ 。

下列敘述何者正確？

(1) 若 $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ ，則 $k = \frac{1}{2}$

(2) 使得 $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ 的整數 k 值有 2 個

(3) 設 $\vec{w}$ 為 $\vec{u}$ 在 $\vec{v}$ 上的正射影。若 $\vec{w} = \vec{v}$ ，則 $k = 1$

(4) 若 $\vec{OA} = \vec{u}$ ， $\vec{OB} = \vec{v}$ ，且 $\vec{OP} = \frac{5}{3}\vec{OA} - \frac{4}{3}\vec{OB}$ ，則 P 落在 $\triangle OAB$ 的內部(不含邊界)

(5) 不論 k 為多少， $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \geq |\vec{u} \cdot \vec{v}|$ 恆成立

5. 設 $\triangle ABC$ 中，若 D 、 E 為 $\overline{AB}$ 的三等分點，且 $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$ ， F 為 $\overline{AC}$ 之中點， $\overline{CD}$ 與 $\overline{EF}$ 交於 H ， $\overline{AH}$ 延長線交 $\overline{BC}$ 於 I ， $\overline{CH}$ 長度為 2。請選出正確的選項。

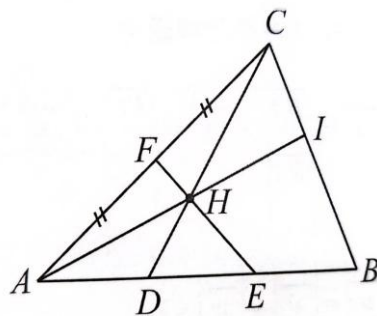
(1) $\vec{AH} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{9}\vec{AC}$

(2) $\overline{BI} : \overline{CI} = 3 : 2$

(3) $\overline{AH} : \overline{HI} = 5 : 4$

(4) $\vec{HE} = \frac{2}{9}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$

(5) $\vec{HC} \cdot \vec{HA} + \vec{HC} \cdot \vec{HE} = -1$



6. 設 $\triangle ABC$ 中， $\vec{a} = \vec{CA}$ ， $\vec{b} = \vec{CB}$ ，且 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ， F 為 $\overline{CA}$ 之中點。

若 G 、 I 、 H 、 O 分別為 $\triangle ABC$ 重心、內心、垂心、外心。請選出正確的選項。

(1) $\vec{IG} \parallel \vec{FB}$

(2) $\vec{CG} \cdot \vec{CB} > \frac{3}{2}$

(3) $\vec{CI} \cdot \vec{CB} > \frac{3}{2}$

(4) $\vec{CH} \cdot \vec{CB} > \frac{3}{2}$

(5) $\vec{CO} \cdot \vec{CB} > \frac{3}{2}$

7. 設 k 為實數，考慮有關 x 、 y 的線性方程組 $\begin{cases} (k-1)x+2y=k+1 \\ 2x+(k-1)y=2 \end{cases}$ ，則下列敘述何者正確？

- (1) 當 $k=3$ 時，此方程組代表兩條重合的直線
- (2) 若 $\Delta=0$ ，則該方程組可能有無窮多解，也可能無解
- (3) 若 $\Delta \cdot \Delta_x \cdot \Delta_y \neq 0$ ，則此方程組的唯一解 (x, y) 必不落在 x 軸或 y 軸上
- (4) 若 $k > 3$ ，則此方程組的解必定落在第二象限
- (5) 若 $\Delta \neq 0$ ，且 $\vec{a} = (k-1, 2)$ ， $\vec{b} = (2, k-1)$ ， $\vec{c} = (k+1, 2)$ ，則 $\vec{c}$ 必定能以唯一的方法表示成 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的線性組合

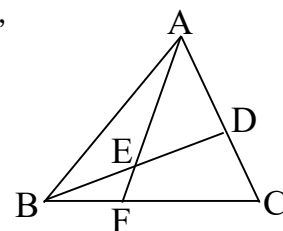
三、選填題(一) (48 分)

說明：第 A 題至第 F 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (⑧ ~ ⑳)。每格完全答對得 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 $\vec{a} = (-3, 2)$ 、 $\vec{b} = (-6, -1)$ 、 $\vec{c} = (5, 3)$ ，且 $\vec{a} + t\vec{b}$ 與直線 $7x - 3y = 5$ 平行， $k\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 垂直，試求數對 $(t, k) = \left(-\frac{\textcircled{8}}{\textcircled{9}\textcircled{10}}, -\frac{\textcircled{11}\textcircled{12}}{\textcircled{13}} \right)$ 。(化至最簡分數)

B. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 $\overline{AC}$ 的中點， E 是 $\overline{BD}$ 的中點， $\overline{AE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 F ，

若 $\overrightarrow{DF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，求 $x + y = \frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}}$ 。(化至最簡分數)



C. $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AF}:\overline{FB}=3:4$ 、 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$ 、 $\overline{CE}:\overline{EA}=3:2$ ，若 G 是 $\triangle DEF$ 的重心， $\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ，求數對 $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\textcircled{16}\textcircled{17}}{63}, \frac{\textcircled{18}\textcircled{19}}{45} \right)$ 。

D. 若方程組 $\begin{cases} (\cos \theta)x + (\sin \theta)y = \cos \phi \\ (-\sin \theta)x + (\cos \theta)y = \sin \phi \end{cases}$ 的解為 (x, y) ，則 $x + y$ 的最大值最接近的整數為 ⑳。

E. 已知聯立方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = 3a_1 + 2b_1 - c_1 \\ a_2x + b_2y = 3a_2 + 2b_2 - c_2 \end{cases}$ 的解為 $x=1, y=-2$ ，且聯立方程組 $\begin{cases} b_1x + (a_1 + 2c_1)y + c_1 = 0 \\ b_2x + (a_2 + 2c_2)y + c_2 = 0 \end{cases}$ 的解為 $x=x_0, y=y_0$ ，則數對 $(x_0, y_0) = (-\frac{\textcircled{21}}{\textcircled{22}}, -\frac{\textcircled{23}}{\textcircled{24}})$ 。

F. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=6$ 、 $\overline{AC}=4$ ，且 $\angle A=60^\circ$ 。設 O 為 $\triangle ABC$ 之外心，而點 P 為 $\triangle ABC$ 內 (含邊界) 的任一點。若 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，試求數對 $(M, m) = (\textcircled{25}\textcircled{26}, \textcircled{27})$ 。

四、選填題(二) (12 分)

說明：第 G 題至第 I 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (28 ~ 39)。每格完全答對得 4 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

G. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=4$ ， $\overline{AC}=6$ ， $\angle A=60^\circ$ ，若平面上另一點 P ，滿足 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ 。試求 $|\overrightarrow{AP}|^2 = \frac{\textcircled{28}\textcircled{29}}{\textcircled{30}}$ 。

H. 已知 $A(1,3)$ 、 $B(0,1)$ 、 $C(2,5)$ ， P 為圓 $x^2 + y^2 - 14x - 22y + 145 = 0$ 上一點，若 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|$ 有最大值時，此時 P 點座標為 $(\textcircled{31}\textcircled{32}, \textcircled{33}\textcircled{34})$ 。

I. 設 $\triangle ABC$ 之三邊長分別為 $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=6$ ， $\overline{CA}=5$ ，若 H 為 $\triangle ABC$ 之垂心，過 H 點做一直線分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 D 、 E 兩點，試求 $\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}$ 的最小值為 $\frac{\textcircled{35}\textcircled{36}}{\textcircled{37}\textcircled{38}\textcircled{39}}$ 。(化至最簡分數)

試題結束

一、單選題：

1. (2) 2. (4)

二、多選題：

3. (2)(3)(5) 4. (1)(2)(5) 5. (2)(3) 6. (1)(5) 7. (3)(5)

三、選填題(一)：

A. $(\frac{-9}{13}, \frac{-11}{3})$ B. $\frac{1}{2}$ C. $(\frac{23}{63}, \frac{11}{45})$ D. 1 E. $(\frac{-4}{5}, \frac{-2}{5})$ F. (18,0)

四、選填題(二)：

G. $\frac{52}{3}$ H. (10,15) I. $\frac{12}{245}$