

113 學年度第二學期第三次定期考高一數學試題

命題範圍：第四章 三角比

※可能用到的數值，請自行斟酌參考： $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ， $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

一、單選題：合計 12 分（每題 6 分）

第 1 題與第 2 題為單選題，每題皆只有一個選項正確。答對者得 6 分；答錯或未作答者，該題得 0 分。

1. 若 $52^\circ < \theta < 54^\circ$ ，且設 $a = \sin \theta$ 、 $b = \sin 2\theta$ 、 $c = \cos 3\theta$ 、 $d = \cos 4\theta$ 、 $e = \tan 5\theta$ ，關於 a 、 b 、 c 、 d 、 e 之大小，試選出正確的選項。

- (1) $d < c < a < b < e$ (2) $e < d < c < b < a$ (3) $e < c < d < a < b$
(4) $d < c < a < e < b$ (5) $c < d < a < b < e$

2. 設點 O 為銳角 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心，若 O 到三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 的距離分別為 x 、 y 、 z ，則關於長度比 $x:y:z$ ，試選出正確的選項。

- (1) $\sin A : \sin B : \sin C$ (2) $\cos A : \cos B : \cos C$

- (3) $\tan A : \tan B : \tan C$ (4) $\sin \frac{A}{2} : \sin \frac{B}{2} : \sin \frac{C}{2}$

- (5) $\cos \frac{A}{2} : \cos \frac{B}{2} : \cos \frac{C}{2}$

二、多重選擇題：合計 35 分（每題 7 分）

第 3 題至第 7 題為多重選擇題，每題至少有一個選項正確。所有選項均答對者，得 7 分；答錯一個選項者，得 4 分；答錯兩個選項者，得 1 分；答錯三個以上選項或未作答者，該題得 0 分。

3. 下列選項中的數值，試選出與 $\cos 71^\circ$ 相同者。

- (1) $\cos(-71^\circ)$ (2) $\cos 109^\circ$ (3) $\sin 251^\circ$ (4) $\sin(-341^\circ)$ (5) $\sin 791^\circ$

4. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\overline{AB} = 6$ ，試選出正確的選項。

- (1) 若 $\overline{AC} = 3$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積可以被唯一決定

- (2) 若 $\overline{BC} = 6$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積可以被唯一決定

- (3) 若 $\overline{BC} = 5$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積可以被唯一決定
 (4) 若 $\overline{BC} = 5$ ，則 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑可以被唯一決定
 (5) 若 $\overline{BC} = 5$ ，則 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑可以被唯一決定
5. 若 $270^\circ < \theta < 315^\circ$ ，且 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = a$ ，其中 a 為非零實數，試選出正確的選項。

(1) $\frac{\theta}{3}$ 是第一象限角 (2) 當 $\tan \theta = -\sqrt{3}$ 時， θ 與 -750° 互為同界角

(3) $\sin \theta \cdot \cos \theta = -\frac{1}{a}$ (4) $\sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{1 + \frac{2}{a}}$

(5) $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - \frac{2}{a^2}$

6. $\triangle ABC$ 中，設 a 、 b 、 c 分別為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之對應邊長，且滿足 $a \cdot \cos A = b \cdot \cos B$ ，試選出正確的選項。

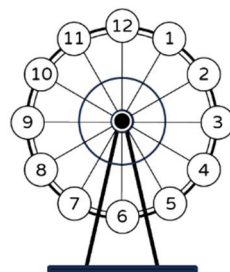
(1) $\sin A = \cos(B + C)$ (2) $\sin \frac{A}{2} = \cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$

(3) $\sin A : \sin B = \cos B : \cos A$ (4) 若 $a \neq b$ ，則 $\triangle ABC$ 必為直角三角形
 (5) 若 $b = c$ ，則 $\triangle ABC$ 必為正三角形

7. 右圖為一個半徑 8 公尺、最高處離地面 20 公尺的摩天輪，摩天輪車廂以順時針依序編號 1、2、...、12。已知摩天輪逆時針等速旋轉一圈需要 60 分鐘，小建 在 10 點時從摩天輪最低處進入 6 號車廂，隨後阿中 則搭乘 11 號車廂，試選出正確的選項。

(1) 當 10 點 05 分時，小建 距離地面 8 公尺
 (2) 當 10 點 20 分時，小建 距離地面 16 公尺
 (3) 當 10 點 30 分時，摩天輪在行駛過程中發生機械故障，立刻停止運轉。此時，阿中 往 小建 的方向望去，發現 小建 的位置在 阿中 的仰角 75° 方向處。

(4) 承選項(3)，此時 小建 與 阿中 相距 $4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$ 公尺
 (5) 承選項(3)，此時若以摩天輪的中心為極點，並以極點為端點，向右作一條水平射線作為極軸，則 阿中 的位置可用極坐標表示為 $[8, 30^\circ]$



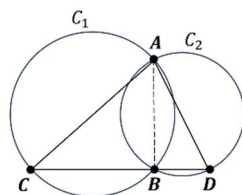
三、選填題：合計 42 分（每題 6 分）

A. 若 $90^\circ < \theta < 180^\circ$,

則 $\frac{\sin(270^\circ + \theta)}{\sin(270^\circ - \theta)} + \frac{\tan(180^\circ + \theta)}{\tan(-\theta)} - \frac{\cos(-\theta)}{\sin(90^\circ + \theta)}$ 之值為_____。

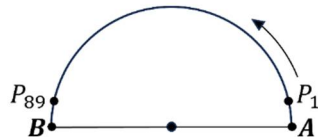
B. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC}$ 邊上的高為 5、 $\overline{CA}$ 邊上的高為 6、 $\overline{AB}$ 邊上的高為 10，則 $\cos C$ 之值為_____。

C. 如右圖，大圓 C_1 、小圓 C_2 相交於 A 、 B 兩點，過 B 點有一線段 $\overline{CD}$ 交大圓於 C 點，且交小圓於 D 點，連接 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AD}$ 。已知 $\angle ACD = 45^\circ$ 且 $\angle ADC = 60^\circ$ ，則大圓與小圓的面積比值為_____。

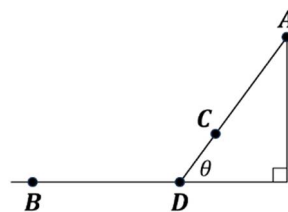


D. 已知坐標平面上有兩直線 L_1 、 L_2 ，若 $L_1: \sqrt{3}x - y + 2025 = 0$ ，而直線 L_2 不過第二象限、且過點 $P(-3, -3\sqrt{3})$ 並與直線 L_1 夾 30° 角，則 L_2 的直線方程式為_____。

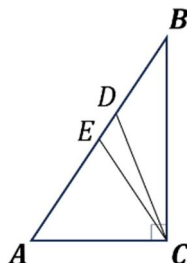
E. 如右圖，將半徑為 1 之半圓周 $\widehat{AB}$ 分成 90 等分，設等分點依次為 P_1 、 P_2 、...、 P_{89} ，則 $\overline{AP_1}^2 + \overline{AP_2}^2 + \dots + \overline{AP_{89}}^2$ 之和為_____。



F. 如右圖，小建 從傾斜角為 θ 之坡路的最高點 A 點，測得地面上 B 點的俯角為 30° 。已知坡長 $\overline{AD}$ 為 60 公尺，當他從 A 點下坡走 40 公尺至 C 點後，再測得同一點 B 點的俯角為 15° ，則 $\tan \theta$ 之值為_____。



G. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ ，且 $\overline{BD} : \overline{DE} : \overline{EC} = 3 : 1 : 4$ ，設 $\angle BCD = \alpha$ ， $\angle DCE = \beta$ ， $\angle ECA = \gamma$ ，則 $\frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$ 之值為_____。



四、題組：合計 11 分

第 26 題與第 27 題為題組，每題皆只有一個正確選項，配分分別為 5 分與 6 分。

2024 年 11 月 24 日，四年一度的世界棒球 12 強賽在東京巨蛋舉行冠軍戰，台灣隊以 4 比 0 完封地主日本隊，勇奪隊史首座世界 12 強賽冠軍，締造歷史性的一刻，也再度掀起台灣對棒球運動的熱潮。現以東京巨蛋棒球場的規格作討論：東京巨蛋 (Tokyo Dome) 是日本首座室內巨蛋型棒球場，左外野與右外野界線距離均為 328 英尺 (約 100 公尺)，中外野最遠處則為 400 英尺 (約 121.92 公尺)，這樣的弧形外野設計提供公平的擊球深度與視野範圍。壘包之間的距離為 90 英尺 (約 27.43 公尺)，四個壘包構成一個正方形內野區。

如下圖，內野的本壘 O 、一壘 A 、二壘 B 、三壘 C 形成一個正方形， $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CO} = 90$ 英尺。而右外野線 $\overline{OD} = 328$ 英尺、左外野線 $\overline{OF} = 328$ 英尺、中外野線 $\overline{OE} = 400$ 英尺，請回答下列兩小題：

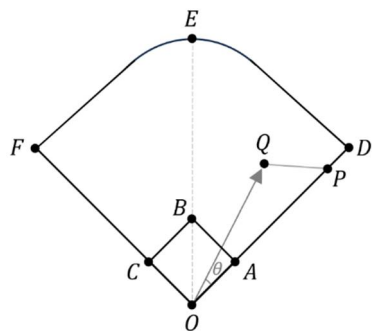
26. 一名打擊者以水平方向速度 123 英尺/秒，將球擊向與右外野線夾角為 θ

的方向，且已知 $\sin \theta = \frac{9}{41}$ 、 $\sin \angle OPQ = \frac{3}{5}$ 。

此時，右外野手位於 Q 點等待飛球落下。若他在看到球擊出的 t 秒後於 Q 點成功接殺，已知 $\overline{PD} = 16$ 英尺，且忽略空氣阻力 (即球在水平方向等速前進)，請問 t 值為何？

(單選題，5 分)

- (1) 1 (2) 1.5 (3) 2 (4) 2.5 (5) 3



27. 承上題，當右外野手在 Q 點接到飛球時，場上為一人出局、二壘 B 有跑者。

此時該名跑者立刻起跑，試圖上三壘 C 。若假設右外野手臂力精準、無任何傳球失誤，且該跑者以每秒 30 英尺的速度奔跑，請問：在忽略空氣阻力（即球在水平方向等速前進）的條件下，右外野手至少需要投出多少水平球速，才能在跑者抵達三壘前完成刺殺？

（請四捨五入至整數位）（單選題，6 分）

（可能用到的數值： $123^2 = 15129$ ， $81^2 = 6561$ ， $82^2 = 6724$ ， $83^2 = 6889$ ， $84^2 = 7056$ ， $85^2 = 7225$ ）

- (1) 81 英尺/秒 (2) 82 英尺/秒 (3) 83 英尺/秒
(4) 84 英尺/秒 (5) 85 英尺/秒