

臺北市立第一女子高級中學 113 學年度第二學期 高二數學 A 第一次期中考 試題卷

作答須知：本次測驗試題卷 4 張，採單面印刷，另有答題卷 1 張。作答時間為 70 分鐘，並不得 使用計算機作答。

共有三大題，滿分為 114 分（因為今年是民國 114 年！），得分超過 100 分將以 100 分計算。

請以 藍色或黑色原子筆 於答題卷上作答，否則不予計分。

並請於答題卷上書寫班級、座號及姓名，書寫資訊有誤者，扣得分 5 分。

祝福各位同學考試順利！(‘,,•ω•,,)♡

一、多選題：共 40 分（每題 10 分，共 4 題，每錯一選項扣 2 分）

1. 在空間中，下列哪些敘述是**必定正確**的？

- (1) 若兩條相異直線不共平面，則此兩條直線為歪斜線。
- (2) 通過直線 L 外一點 A ，恰有一平面與直線 L 垂直。
- (3) 若直線 L 不垂直平面 E ，則平面 E 上的任意一條直線皆不垂直直線 L 。
- (4) 若相異平面 E_1, E_2 和平面 F 的交線分別為 L_1, L_2 ，且 $L_1 \perp L_2$ ，則 $E_1 \perp E_2$ 。
- (5) 設平面 E 上有一直線 L 以及一點 B ，點 B 不在直線 L 上，又點 C 在直線 L 上，點 A 不在平面 E 上，若直線 BC 垂直直線 L ，且直線 AC 垂直直線 L ，則直線 AB 垂直平面 E 。

2. 令 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 、 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ，且行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta$ ，試選出**必定正確**的選項。

(1) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta$ 。

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 \\ -b_1 & b_2 & -b_3 \\ c_1 & -c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta$ 。

(3) 若實數 x 滿足 $\begin{vmatrix} a_1 \cdot x & a_2 \cdot x & a_3 \cdot x \\ b_1 \cdot x & b_2 \cdot x & b_3 \cdot x \\ c_1 \cdot x & c_2 \cdot x & c_3 \cdot x \end{vmatrix} = \Delta$ ，則 $x=1$ 是唯一解。

(4) $\Delta = b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ 。

(5) 以 $3\vec{a} - \vec{b}$ 、 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 所張出的平行六面體體積為 $7 \cdot |\Delta|$ 。

3. 坐標空間中有四點 $A_k \left(\cos \frac{k\pi}{2}, \sin \frac{k\pi}{2}, k \cdot r \right)$ ，其中 $k=1, 2, 3, 4$ 且 $r > 0$ （注意 r 不會等於 0），

連接 $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_1}$ ，試選出正確的選項。

(1) $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_1}$ 這四條線段在 xy 平面的投影會形成一個正方形。

(2) 直線 A_1A_2 與直線 A_3A_4 平行。

(3) 若 $\angle A_1A_2A_3 = 120^\circ$ ，則 $r = \sqrt{2}$ 。

(4) 當 $r=1$ 時， $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積為 $2\sqrt{2}$ 。

(5) 以 $V(r)$ 表示四面體 $A_1A_2A_3A_4$ 的體積，則 $V(2025) = 2025 \times V(1)$ 。

4. 已知坐標空間中原點 $O(0,0,0)$ 、 $A(a,b,12)$ 、 $B(c,d,5)$ 及 $C(e,f,0)$ ，且 $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ c^2 + d^2 = 144 \\ e^2 + f^2 = 169 \end{cases}$ ，試選出正確的選項。

(1) $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 13$ 。

(2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 可能為 0。

(3) ΔOAB 面積的最小值為 $\frac{169\sqrt{2}}{4}$ 。

(4) 若行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 12 \\ c & d & 5 \\ e & f & 0 \end{vmatrix} = 0$ ，則 $\overrightarrow{OC}$ 可以表示成 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 的線性組合。

(5) 四面體 $O-ABC$ 體積的最大值為 $\frac{13^3}{6}$ 。

二、填充題：共 60 分（每格 6 分，共 10 格）

5. 設 x, y, z 為實數，且 $8x - 4y + z = 9$ ，求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值為_____。

6. 已知坐標空間中三點 $A(1,3,5)$ 、 $B(4,8,4)$ 、 $C(2,5,6)$ ，試求 B 點在直線 AC 上的投影點坐標為_____。

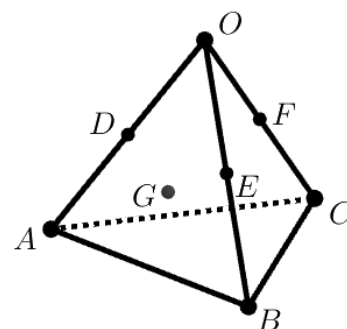
7. 坐標空間中有 不共平面 的四點 $O(0,0,0)$ 、 $A(2,3,1)$ 、 $B(1,2,4)$ 、 C ，

(a) $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} =$ _____。

(b) 已知 ΔOAC 的面積為 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ，且 ΔOBC 的面積為 $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ，

考慮四面體 $O-ABC$ 以底面 OBC 、 OCA 、 OAB 的三個高分別為 a, b, c ，則 a, b, c 三者的大小關係為_____。

8. 如右圖，正四面體 $O-ABC$ 中，令 D, E, F 分別為 $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ 的中點，且 G 為 $\triangle OAB$ 的重心。



- (a) 若 $\overrightarrow{FG} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$ ，則數組 $(a, b, c) =$ _____。
- (b) 若 $\overline{FG} = k\overline{OA}$ ，則實數 $k =$ _____。

9. 將一個邊長為 1 的正方形紙張 $ABCD$ ，沿著其兩條對角線 AC 、 BD 對摺，形成兩條摺痕，這些摺痕將正方形紙張分為 4 個等腰直角三角形。剪去其中 1 個等腰直角三角形（以圖-A 的斜線區域標示），再沿著先前對摺之摺痕 OB 、 OC 往內摺，使得 OA 線段與 OD 線段重合，此時可以摺出一個側面皆由全等的等腰直角三角形所組成的三角錐 $O-ABC$ 。重複以上動作，可得到另一個三角錐 $P-ABC$ （和三角錐 $O-ABC$ 全等）。將三角錐 $O-ABC$ 和 $P-ABC$ 組合在一起，可得到下圖-B 的六面體圖形，此圖形稱為莫利六面體(Molly's hexahedron)。試回答以下問題：

- (a) 在圖-B 中，若平面 OBC 和平面 PBC 的兩面角為 θ ，則 $\sin \theta =$ _____。

- (b) 已知 $\text{角錐體積} = \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$ ，試求莫利六面體的體積為_____。

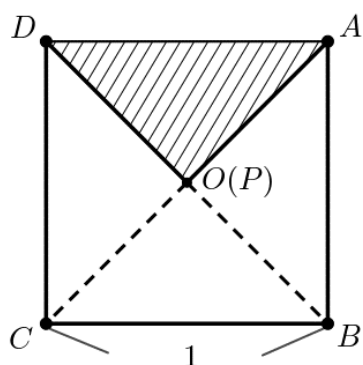


圖-A

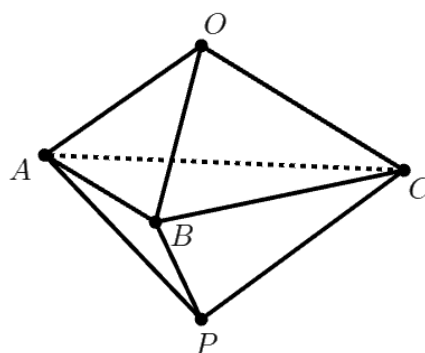


圖-B

10. 設 $\vec{v}_1 = (-2, 1, 3)$ 、 $\vec{v}_2 = (0, 3, -1)$ ，且 $\vec{a} = (1, 30, 0) = p\vec{v}_1 + q\vec{v}_2 + r\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$ ，其中 p, q, r 為實數。試求數組 $(p, q, r) =$ _____。

11. 坐標空間中有二點 $A(2, 3, 4), B$ ，其中 B 點的 z 坐標 < 0 ，已知相異兩點 P, Q 皆在直線 AB 上，

又 P 點在 z 軸上、 Q 點在 xy 平面上， $\overline{AP} : \overline{BP} = \overline{AQ} : \overline{BQ} = 1:2$ ，試求 B 點的坐標為_____。

三、混合題：共 14 分（各小題配分於題末，請於答題卷上作答）

12-15 題為題組

已知坐標空間中兩點 $O(0,0,0), A(6,6,6)$ ，若 第一卦限上 有一動點 $P(a,b,c)$ 滿足 $\overline{AP} = 2\sqrt{3}$ ，

且 P 點在 x 軸、 y 軸、 z 軸的投影點分別為 P_1, P_2, P_3 。以符號 $L(a,b,c)$ 表示 $\overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \overline{PP_3}$ 之值，試回答下列問題：

12. 請以 a, b, c 表示 $L(a,b,c)$ 的值。（填充題，2 分）

13. 試求出 $\overline{OP}$ 的最大值。（填充題，2 分）

14. 試利用柯西不等式說明 $L(a,b,c) \leq \sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2)}$ ，並說明等號成立時， a, b, c 的條件為何？

（非選擇題，6 分，需寫出計算過程）

15. 試利用 13. 以及 14. 的結論求出 $L(a,b,c)$ 的最大值，以及此時 P 點的坐標為何？

（非選擇題，4 分，需寫出計算過程，可直接使用前面小題的結論作答）

試題結束，請務必檢查是否將答案填寫至答題卷上

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

總得分：114 分（答題卷個人資訊有誤者，扣得分 5 分）

得分：

一、多選題：共 40 分

題號	1.	2.	3.	4.
答案	(1)(2)	(1)(2)(5)	(1)(3)(5)	(1)(2)(4)(5)

二、填充題：共 60 分

題號	5.	6.	7(a).	7(b).
答案	1	(3,7,7)	(10,-7,1)	$b > a > c$
題號	8(a).	8(b).	9(a).	9(b).
答案	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$
題號	10.	11.		
答案	$\left(2, 9, -\frac{1}{2}\right)$	(4,6,-8)		

三、混合題：共 14 分

題號	作答區
12. (2)	$L(a,b,c) = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$
13. (2)	$\overline{OP}$ 的最大值為 $8\sqrt{3}$
14. (6)	令 $\vec{u} = (\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{b^2+c^2}, \sqrt{c^2+a^2})$、$\vec{v} = (1,1,1)$，由柯西不等式，$\vec{u} \vec{v} \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ $\Rightarrow [(a^2+b^2) + (b^2+c^2) + (c^2+a^2)] \times 3 \geq (\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2})^2 = [L(a,b,c)]^2$ 得 $L(a,b,c) \leq \sqrt{3 \times 2(a^2+b^2+c^2)} = \sqrt{6(a^2+b^2+c^2)}$。 等號成立時，$\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{c^2+a^2}$，平方得 $a^2+b^2 = b^2+c^2 = c^2+a^2 \Rightarrow a^2 = b^2 = c^2$ 又因為 P 點在第一卦限，$a, b, c > 0$，故等號成立時，$a = b = c$。
15. (4)	由 13.，$\overline{OP} = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \leq 8\sqrt{3}$，且由 14.，$L(a,b,c) \leq \sqrt{6(a^2+b^2+c^2)}$。 故 $L(a,b,c) \leq \sqrt{6(a^2+b^2+c^2)} \leq \sqrt{6} \times 8\sqrt{3} = 24\sqrt{2}$。 因 $\overline{OP} \leq 8\sqrt{3}$ 及 $L(a,b,c) \leq \sqrt{6(a^2+b^2+c^2)}$ 之等式皆成立於 $a = b = c$，又 $a, b, c > 0$，故 $a = b = c = 8 \Rightarrow P(8,8,8)$。