

請於答案卡上正確劃記班級、座號，若未劃記或劃記錯誤，扣 10 分。

說明：試題中出現的 i 皆表示 $\sqrt{-1}$ 。配分 105 分，得分超過 100 分以 100 分計算。

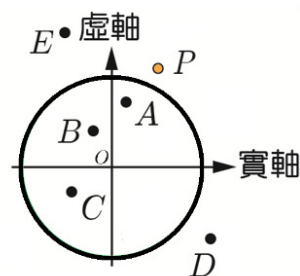
參考數值： $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8451$

一、單一選擇題：(每題 5 分)

1. 如右圖，複數 z 在複數平面上對應的點 P 位於單位圓 O 的外部，

則 $\frac{1}{z^2}$ 在複數平面上對應的點最可能為下列哪一個選項？

(1) A 點 (2) B 點 (3) C 點 (4) D 點 (5) E 點。



2. 百貨公司週年慶舉行獎金遊戲，規則是有十張卡片分別寫上 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9，參加者依序取出四張卡片，取後不放回，作成四位數，此四位數即為參加者的獎金。老川參加此遊戲，他先抽出 5 作為千位數、第二次抽出 8 作為百位數，在此條件下，老川獲得獎金的期望值為多少元？

(1) 5842 元 (2) 5844 元 (3) 5846 元 (4) 5848 元 (5) 5850 元。

二、多重選擇題：(每題 8 分，錯一個選項得 6 分，錯兩個得 4 分，錯三個得 2 分，其餘情形得 0 分)

3. 設兩多項式 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8x + 1$ 與 $g(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ 。試問下列哪些選項中的區間存在實數 a ，

使得 $f(a) - g(a) = a$ ？(1) $(-\infty, -2)$ (2) $(-2, 0)$ (3) $(0, 2)$ (4) $(2, 4)$ (5) $(4, \infty)$ 。

4. 連續投擲一枚不公平的硬幣，每次投擲皆互為獨立事件。太古宣稱此枚硬幣首次擲出正面時，總共投擲次數的期望值為 10 次，請選出正確的選項。

- (1) 依據太古宣稱，投擲此枚硬幣 3 次，至少出現一次正面的機率小於 0.1
- (2) 依據太古宣稱，投擲此枚硬幣 100 次，出現正面次數的期望值為 10 次
- (3) 依據太古宣稱，投擲此枚硬幣 199 次，出現 20 次正面的機率大於出現 19 次正面的機率
- (4) 依據太古宣稱，連續投擲此枚硬幣，若「超過 n 次才首次出現正面」的機率小於 0.05，則 n 的最小值為 29 次
- (5) 祥平以顯著水準 0.05，並連續投擲此枚硬幣進行試驗，直到第 28 次才首次出現正面，依據此次試驗的結果，祥平應拒絕太古的宣稱。

5. 設多項式 $f(x) = x^3 - 3x + 4$ ，且 α 為方程式 $f(x) = 0$ 唯一的實根。想求 α 的近似值，

可先取 $x = a_1$ 再利用牛頓法得 $x = a_2$ 、 $x = a_3$ 、... 形成無窮數列 $\langle a_n \rangle$ ，請選出正確的選項。

(1) $\alpha < -2$

(2) 若 $f(a + bi) = 0$ ，其中 a, b 皆為實數，則 $a < 0$

(3) 若 $a_1 > \alpha$ ，則 $a_2 < a_1$

(4) 若 $a_1 < \alpha$ ，則 $a_2 > a_1$

(5) 若 $a_2 = -\frac{20}{9}$ ，則 $a_1 = -2$ 。

6. 設方程式 $x^9 + x^6 + x^3 + 1 = 0$ 的九個根在複數平面上所代表的點分別為 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$ ，

請選出正確的選項。

(1) 方程式 $x^9 + x^6 + x^3 + 1 = 0$ 的每一根皆為方程式 $x^{12} + 1 = 0$ 的根

(2) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$ 九個點在每個象限恰好都有 2 個

(3) $7 + 8i$ 與 $7 - 8i$ 在複數平面上所代表的點分別為 B 與 C ，則 $\sum_{k=1}^9 \overline{A_k B} = \sum_{k=1}^9 \overline{A_k C}$

(4) 以 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$ 為頂點的九邊形面積為 $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(5) 給定一點 $P\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)$ ，則 $\overline{PA_1} \times \overline{PA_2} \times \overline{PA_3} \times \overline{PA_4} \times \overline{PA_5} \times \overline{PA_6} \times \overline{PA_7} \times \overline{PA_8} \times \overline{PA_9} < 3$ 。

三、填充題：(A~F 每題 7 分；G~J 每題 4 分)

A. 已知複數 z 滿足 $\frac{6-8i}{z-4} = 1+i$ ，則 z 的共軛複數為 ⑦+⑧*i*。

B. 設 a, b 皆為非零實數，已知 $a+bi$ 是 $(3a-5b)+(6b)i$ 的平方根，則數對 $(a, b) =$ (⑨, ⑩)。

C. 設 $f(x)$ 為滿足下列條件的最低實係數多項式： $f(x)$ 最高次項的係數是 1，且 -1 、 $1-2i$ 皆為方程式 $f(x)=0$ 的解。試求 $f(4)=$ ⑪⑫。

D. 設 $f(x)$ 為實係數多項式，已知 $(\sqrt{3}+i)^{22} \cdot f(11+13i)=(1-i)^{50}$ ，則 $f(11-13i)=$ ⑬ $\sqrt{14}$ +⑮ i 。
(化為最簡根式)

E. 假設阿三每接一通電話，內容是「騷擾電話」的機率是固定的，且每通電話是否為「騷擾電話」互相獨立。
已知某日阿三至少到第 4 通電話才首次接到「騷擾電話」(前 3 通都不是「騷擾電話」)的機率為 $\frac{125}{216}$ 。
設 X 為該日阿三首次接到「騷擾電話」時，總共接到的電話數，且期望值為 $E(X)$ 、變異數為 $Var(X)$ ，
則數對 $(E(X), Var(X))=$ (⑯, ⑰⑱)。

F. 坐標空間中，考慮邊長為 1 的正立方體，固定一頂點 O 。從 O 以外的七個頂點隨機選取相異兩點，
設此兩點為 P 、 Q ，則所得內積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 值的變異數為 $\frac{⑲⑳}{㉑㉒}$ 。(化為最簡分數)

G. 設複數 $z=\frac{5}{4}(\cos 55^\circ+i \sin 55^\circ)$ ，若 $|z^n|>1000$ 且 z^n 的主幅角為第一象限角，則最小正整數 n 為 ㉓㉔。

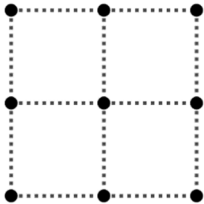
H. 已知 $1-i$ 、 α 、 β 、 γ 為 $x^4-6x^3+13x^2-14x+6=0$ 的四根，則 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\underline{\textcircled{25}+\textcircled{26}i}$ 。

I. 設 α 、 β 為 $x^2+6x-4=0$ 的兩根，其中 $\alpha<\beta$ 。若 $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=a+bi$ ，則 $a+b=\underline{\textcircled{27}}$ 。

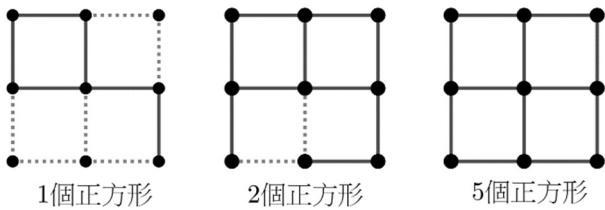
J. 已知 $16+16\sqrt{3}i$ 的三次方根，其個別的主幅角分別為 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 ，則 $\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\cdot\cos\theta_3=\frac{\textcircled{28}}{\textcircled{29}}$ 。
 （化為最簡分數）

四、加分題：（每格 5 分）

K. 右圖是 2×2 的正方形，是由 4 個每邊皆為虛線的正方形拼成。將圖中 12 條虛線的每一條，皆擲一枚公正的硬幣決定是否畫為實線（擲出正面就畫成實線；擲出反面就維持虛線）。擲了 12 次硬幣後，計算實線所圍出的正方形有幾個，試問擲了 12 次硬幣後，正方形個數的期望值為 $\frac{\textcircled{30}\textcircled{31}}{\textcircled{32}\textcircled{33}\textcircled{34}}$ 個。（化為最簡分數）



例如：



市立臺中一中 113 學年度第二學期期末考 高三選修數學甲試題 簡答

1. (3) 2. (2) 3. (1)(3)(4) 4. (2)(4) 5. (1)(4) 6. (3)(4)

A. $3+7i$ B. $(3, 5)$ C. 65 D. $4\sqrt{3}+4i$ E. $(6, 30)$ F. $\frac{20}{49}$

G. 33 H. $7+4i$ I. 3 J. $\frac{1}{8}$ K. $\frac{65}{256}$