

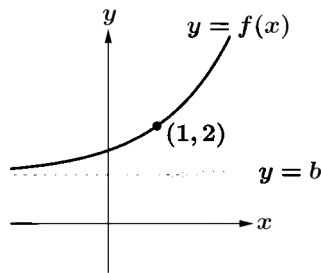
新竹市新竹高中 113 上高二第一次期中考 2A(理)

一、多選題 (占 20 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

1. 設函數 $f(x) = a^{1-x} + b$ 的圖形如右，且過點 $(1, 2)$ ，則下列哪些選項正確？

- (1) $a > 1$
- (2) $b = 1$
- (3) $1 < a + b < 2$
- (4) 若 $x_2 > x_1$ ，則 $f(x_2) > f(x_1)$
- (5) 對任意兩實數 x_1, x_2 ，恆有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$



2. 設 $\log 2 = a$ ， $\log 3 = b$ ，則下列哪些選項正確？

- (1) $100^{a+b} = 36$
- (2) $\log 2 \times \log 3 = b^a$
- (3) $2^b = 3^a$
- (4) $\log_{225} 324 = \frac{2a + b}{1 - a + b}$
- (5) $a < 5a + 2b - 2 < b$

3. 下列哪些選項中的方程式恰有兩個實根？

- (1) $2^x = x^2$
- (2) $\log_2 x = \sqrt{x}$
- (3) $3^{x+1} + 3^{-x+1} = 4$
- (4) $9 \log(x-1) - x + 2 = 0$
- (5) $(\sqrt{2})^x = \log_2 x^2$

4. 若一個圖形經過適當的平移對稱後和另一個圖形重合，則兩圖形視為全等。那麼下列選項中，哪些函數的圖形與 $y = 10^x$ 的圖形全等？

(1) $y = 10^{3x}$

(2) $y = 3 \times 10^x$

(3) $y = 3 \log x$

(4) $y = \log \left(\frac{3x-1}{10} \right)$

(5) $y = \log \frac{1}{x}$

二、填充題（占 60 分）

說明：第 5 題至第 14 題，每題 6 分。

5. 解方程式 $6^x + 3^{x+1} - 9 \times 2^x = 27$ ，得 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 解不等式 $9^{\frac{1-x}{2}} - 28 \times (\sqrt{3})^{-x-2} + 1 > 0$ ，得 x 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 某科學家將掉落的樹葉收集於袋中，再放至溪流觀察落葉的分解情形，已知落葉碳元素殘留的比例 $f(x)$ 是時間 x (日) 的函數，滿足 $f(x) = e^{-kx}$ ，其中 $e \approx 2.718$ 稱為自然指數， k 為一定值，稱為落葉碳元素的日喪失比率。若已知白楊樹落葉在溪流中的喪失比率 $k \approx 0.0044$ ，則白楊樹落葉在溪流中至少幾日後（取整數位），其碳元素殘留的比例至多為原來的一半？ $\underline{\hspace{2cm}}$ 。（已知 $\log_e 2 = \ln 2 \approx 0.6931$ ，其中 $\ln$ 為以 e 為底的對數，稱為自然對數，即 $\ln x = \log_e x$ ）

8. 試求 $(\log_2 27 + \log_4 81) \left(\log_3 \frac{1}{49} - \log_{\frac{1}{3}} 343 \right) \left(\frac{1}{\log_2 7} + \frac{\log_{11} 2}{\log_{11} 7} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，且 $A_1(x_1, 15)$ ， $A_2(x_2, y_2)$ ， $A_3(x_3, y_3)$ ， $A_4(x_4, 3)$ 與 $A_5(x_5, y_5)$ 為函數 $f(x) = \log_a x$ 圖形上由左至右的五個相異點，若 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 為等比數列，則 $y_5 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 設 $\log t < 0$ ，若 $a = \frac{1}{4} \log_t \frac{1}{2}$ ， $b = \frac{1}{2} \log_t \frac{1}{3}$ ， $c = \frac{1}{3} \log_t \frac{1}{4}$ ，則 a, b, c 的大小排序為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 若函數 $f(x) = \log_a (x^2 - 12x + 3a^2 - 10a + 39)$ 當 $x \geq 7$ 時有最小值 0，則實數 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 解不等式 $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) \leq 3$ ，得 x 的範圍為【 】。

13. 計算 $x = \frac{\sqrt[4]{8.31} \times (0.631)^3}{4310}$ ，若 x 從小數點後第 n 位開始不為 0，且此第 1 個不為 0 的數字為 a ，則數對 $(n, a) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(已知 $\log 8.31 \approx 0.9196$ ， $\log 6.31 \approx 0.8000$ ， $\log 4.31 \approx 0.6345$ ， $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)

14. 設 x, y 為正實數，若 $\log_2 x = \log_4 y = \log_8 (x + y)$ ，則 $\log_{16} (y - x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、計算題（占 20 分）

說明：第 15 題至第 16 題。

15. 已知實數 x 滿足 $10 < x < 1000$ ，且 $\log x$ 與 $\log x^3$ 有相同的尾數，試求 x 之值。
(10 分)

16. 小明想要購買一價值 1000 萬元的自用住宅，計畫向某銀行申請一般貸款，分期 20 年償付還清。已知該銀行目前優惠房屋貸款的年利率為 2.16%，試回答下列問題：

(1) 若按每月為一期複利(一期利率 $= \frac{1}{12}$ 年利率)計算，貸款 1000 萬元，20 年後一次還清之本利和為多少萬元？(請將萬元以下無條件進位取至萬元)(3 分)

(2) 設採本息平均攤還法，即按借貸利率，將貸款應還本金與利息平均分攤於每一期，每期繳納相同的金額，於期滿償付還清。而且 20 年長貸，該銀行願意貸款給小明的房貸總額(本金)，是以精算下每月房貸償付金額(本利和)不超過小明月收入的二分之一為原則。那麼小明月收入 6 萬，每月最多還款 3 萬元，能向銀行貸到的最高總額(本金)為多少萬元？(請將萬元以下無條件捨去不計)(已知 $\log 1.0018 \approx 7.81 \times 10^{-4}$ ， $\log 1.5397 \approx 0.1874$)(7 分)

參考答案

1. 2345 2. 135 3. 24 4. 245

5. 2

6. $x > 4$ 或 $x < -2$

7. 158

8. 10

9. -1

10. $b > c > a$

11. 3

12. $\frac{1}{256} \leq x < 1$

13. $(5, 9)$

14. 0

15. $10\sqrt{10}$ 或 $100\sqrt{10}$

16. (1) 1540 萬元；(2) 584 萬元