

總分 120 分，得分超過 100 分以 100 分計算。本測驗可使用計算機，並請將答案填寫至答案卷上。

一、填充題 I (請默寫對數律及對數近似值準確到小數點後第 4 位，每格 2 分，共 20 分。)

(1) $\log_a b + \log_a c =$ _____	(2) $\log_a b^n =$ _____
(3) $\log_a b \times \log_b a =$ _____	(4) $\frac{\log_c a}{\log_c b} =$ _____
(5) $\log 2 \approx$ _____	(6) $\log 3 \approx$ _____
(7) $\log 7 \approx$ _____	(8) $10^n = 6$, $n \approx$ _____
(9) $10^m = 8$, $m \approx$ _____	(10) $10^z = 201202$, $z \approx$ _____

二、單選題(每題 6 分，共 30 分。請將答案填寫至答案卷上。)

1. () 已知 π 為圓周率，其近似值約為 3.1415926，則下列哪一個式子所得的值最大？

- (1) $\log_2 11 \times \log_{11} 7 \times \log_7 3 \times \log_3 16$ (2) $9^{\log_{27} 8}$ (3) $3 + \log_3 \pi$
 (4) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{\pi}\right)^4$ (5) $\log_2 (\sqrt{41} + 5) + \log_2 (\sqrt{41} - 5)$

2. () 已知 a 、 b 為實數，且滿足 $7^a = 12^b$ ，試選出正確的選項。

- (1) $\frac{b}{a} < -1$ (2) $-1 < \frac{b}{a} < 0$ (3) $0 < \frac{b}{a} < 1$ (4) $1 < \frac{b}{a} < 2$ (5) $\frac{b}{a} > 2$

3. () 下列哪一個選項中的函數圖形的漸近線「不是」坐標軸 (x 軸或 y 軸其中之一)？

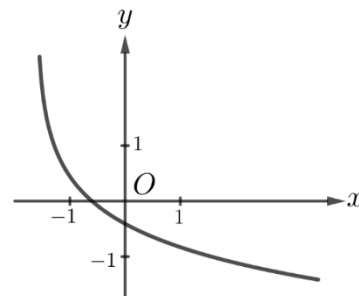
- (1) $y = 5 \cdot 2^x$ (2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ (3) $y = \log_2 |x|$
 (4) $y = 2 + \log_{\frac{1}{3}} x$ (5) $y = \log(x-2)$

4. () 已知函數 $f(x) = \log_2(3x^2 - 12x + 27)$ 的最小值為 a 。請選出正確的選項。

- (1) $0 \leq a < 1$ (2) $1 \leq a < 2$ (3) $2 \leq a < 3$ (4) $3 \leq a < 4$ (5) $4 \leq a < 5$

5. () 函數 $y = \log(x+b)^a$ 的函數圖形如右，試問下列何者正確？

- (1) $a > 0$ 且 $-2 < b < -1$ (2) $a < 0$ 且 $b < 0$
 (3) $a < 0$ 且 $0 < b < 1$ (4) $a < 0$ 且 $1 < b < 2$
 (5) $a < 0$ 且 $b > 2$



三、多選題(每題 10 分，共 20 分。請將答案填寫至答案卷上。)

6. () 下列有關指數與對數的運算敘述，哪些是正確的？

- (1) $\log_1 0$ 的值可以是任意數 (2) $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{3}) = -\log_2 9$ (3) $(-3)^2 = 9$
 (4) $\log_7(4 + \pi) = \log_7 4 + \log_7 \pi$ (5) $\log(x^2) = 4 \Rightarrow x = \pm 100$

7. () 已知 e 為自然對數的底，其近似值約為 2.71828，則下列敘述哪些正確？

- (1) 若 $0 < x < 1$ ，則 $y = e^x$ 的圖形 $y = \pi^x$ 的圖形的上方
 (2) 若 $x > 1$ ，則 $y = \log_e x$ 的圖形 $y = \log_\pi x$ 的圖形的上方
 (3) $y = a^x$ 的圖形與 $y = \log_a x$ 的圖形的凹向性一致
 (4) $y = a^{-x}$ 的圖形與 $y = \log_a x$ 的圖形的遞增遞減性一致
 (5) 若 $p > q > 0$ ，則 $\frac{e^p + e^q}{2} > e^{\frac{p+q}{2}} > e^{\sqrt{pq}}$

四、填充題 II (每格 8 分，共 40 分。請將答案填寫至答案卷上。)

A. 阿鴻在股票市場裡頻繁買進賣出，每個交易日收盤結算都獲利該日開盤前資金的 5%，第 200 個交易日收盤後，經結算得資金已達原始資金的 $(1+5\%)^{200}$ 倍。若將 $(1+5\%)^{200}$ 表示為科學記號 $a \times 10^n$ 寫法，即 $(1+5\%)^{200} = a \times 10^n$ ，則數對 $(a, n) =$ _____。

(a 請計算準確至小數點後第 2 位， n 為正整數)

B. 對數方程式 $\log_5(x^2 + 13x + 30) = \log_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{7x + 46})$ 的解 $x =$ _____。

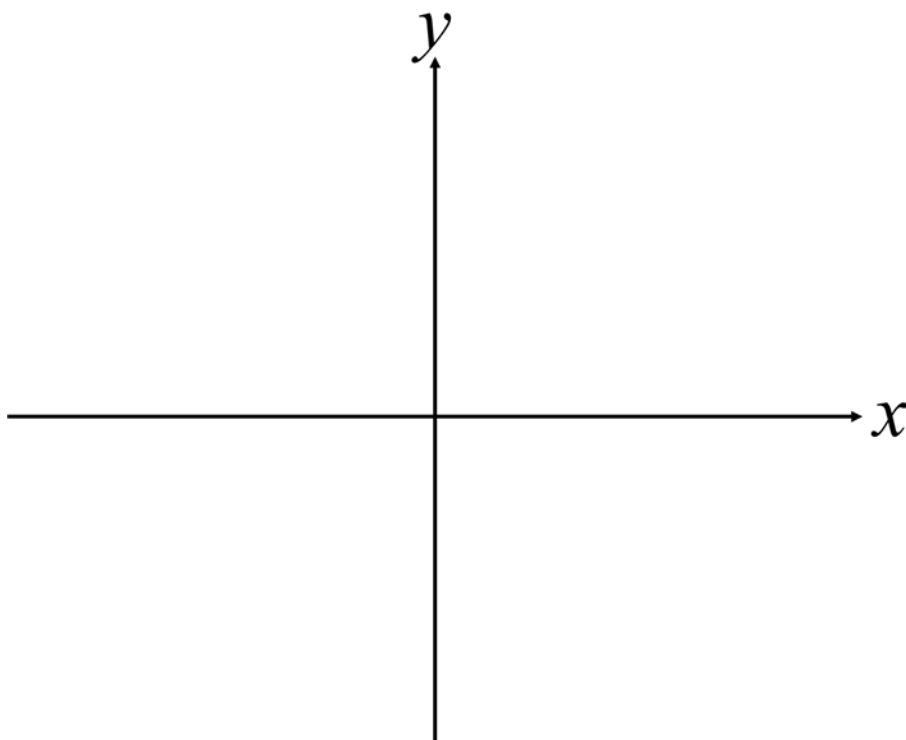
C. 已知 $1 \leq x \leq 4$ ，且 $f(x) = x^{8 - \log_2(x^4)}$ 。令函數 $f(x)$ 的最大值為 M 、最小值為 m ，
求數對 $(M, m) =$ _____

D. 在養分充足的情形下，細菌的數量會以指數函數的方式成長，假設細菌 A 的數量每兩個小時可以成長為四倍，細菌 B 的數量每三個小時可以成長為四倍。若養份充足且一開始 A 細菌的數量與 B 細菌的數量相等，則大約 _____ 小時後(四捨五入整數)，細菌 A 的數量除以細菌 B 的數量會大於 2024。

E. 根據海洋學的研究，當一個潛水員每下降 1 公尺，光線的強度就會減少 2.5%，若現在有一位潛水員已經下降到光線強度低於水面時的 30%，則此時潛水員至少下降了大約 _____ 公尺。
(準確到小數點後第 2 位)

五、繪圖題(10 分)

請將函數 $y = \log_2(x^2)$ 的圖形繪製在答案卷上的坐標軸上。



市立臺中一中 113 學年度第 1 學期第二次期中考高二數學 B 答案卷

班級：□201 □202 座號：_____ 姓名：_____

總分 120 分，得分超過 100 分以 100 分計算。

一、填充題 I (每格 2 分，共 20 分。)

(1)	$\log_a bc$	(2)	$n \times \log_a b$	(3)	1	(4)	$\log_b a$
(5)	0.3010	(6)	0.4771	(7)	0.8451	(8)	0.7781 或 0.7782
(9)	0.9030 或 0.9031	(10)	5.3036				

二、單選題(每題 6 分，共 30 分。)

1.	(4)	2.	(3)	3.	(5)	4.	(4)	5.	(4)
----	-----	----	-----	----	-----	----	-----	----	-----

三、多選題(每題 10 分，共 20 分。)

6.	(2)(3)(5)	7.	(2)(5)
----	-----------	----	--------

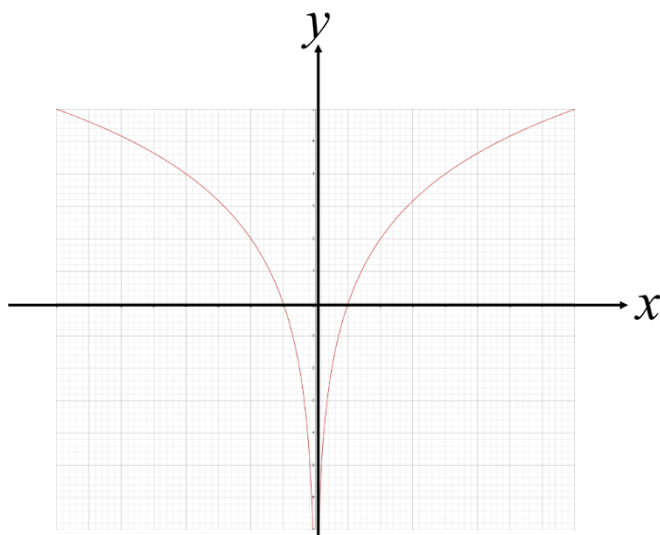
四、填充題 II (每題 8 分，共 40 分。)

A.	(1.73, 4)	B.	2	C.	(16,1)
D.	33	E.	47.55		

五、繪圖題(10 分)

六、請將函數 $y = \log_2(x^2)$ 的圖形

繪製在右方坐標軸上。



一、填充題 I (每格 2 分，共 20 分。)

(1) $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$	(2) $\log_a b^n = n \times \log_a b$
(3) $\log_a b \times \log_b a = 1$	(4) $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$
(5) $\log 2 \approx 0.3010$	(6) $\log 3 \approx 0.4771$
(7) $\log 7 \approx 0.8451$	(8) $10^n = 6$, $n \approx 0.7781$ 或 0.7782
(9) $10^m = 8$, $m \approx 0.9030$ 或 0.9031	(10) $10^z = 201202$, $z \approx 5.3036$

二、單選題(每題 6 分，共 30 分。)

1. (4) (1) $\log_2 11 \times \log_{11} 7 \times \log_7 3 \times \log_3 16 = \log_2 16 = 4$ (2) $9^{\log_{27} 8} = (3^2)^{\log_3 2} = (3^{\log_3 2})^2 = 2^2 = 4$

(3) $3 + \log_3 \pi > 3 + \log_3 3 = 4$ (4) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{\pi}\right)^4 = \log_3 \pi^4 = 4 \times \log_3 \pi = 3 \times \log_3 \pi + \log_3 \pi > 3 + \log_3 \pi$

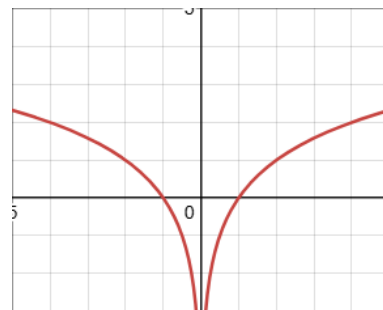
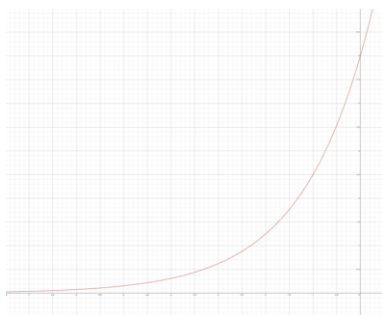
(5) $\log_2 (\sqrt{41} + 5) + \log_2 (\sqrt{41} - 5) = \log_2 (\sqrt{41} + 5)(\sqrt{41} - 5) = \log_2 (41 - 25) = \log_2 16 = 4$

2. (3) $7^a = 12^b \Rightarrow 7 = 12^{\frac{b}{a}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \log_{12} 7 = \frac{\log 7}{\log 12} \approx 0.7831$

3. (5) (1) $y = 5 \cdot 2^x$

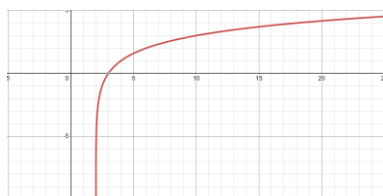
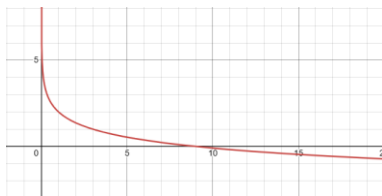
(2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$

(3) $y = \log_2 |x|$



(4) $y = 2 + \log_{\frac{1}{3}} x$

(5) $y = \log(x-2)$



4. (4) $f(x) = \log_2 (3x^2 - 12x + 27) = \log_2 [3(x^2 - 4x) + 27] = \log_2 [3(x-2)^2 + 15] \geq \log_2 15$,

故最小值為 $\log_2 15$ 。又 $\log_2 8 < \log_2 15 < \log_2 16 \Rightarrow 3 < \log_2 15 < 4$, 故選(4)。

5. (4) $y = \log(x+b)^a = a \cdot \log(x+b) \Rightarrow$ 先左移 b 單位($1 < b < 2$) , 再直方向伸縮為原來 a 倍($a < 0$)。

三、多選題(每題 10 分，共 20 分。)

6. (2)(3)(5)

(1) $\log_1 0$ 記號不存在

$$(2) \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right) = \log_{\frac{1}{2^2}} 3^{-1} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} \times \log_2 3 = -2 \log_2 3; -\log_2 9 = -\log_2 3^2 = -2 \log_2 3$$

$$(3) (-3)^2 = 9 \quad (4) \log_7(4+\pi) \neq \log_7 4 + \log_7 \pi = \log_7 4\pi$$

$$(5) \log x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 10^4 \Rightarrow x = \pm 10^2 = \pm 100$$

7. (2)(5)

(1) 若 $0 < x < 1$ ，則 $y = e^x$ 的圖形 $y = \pi^x$ 的圖形的下方

(2) 若 $x > 1$ ，則 $y = \log_e x$ 的圖形 $y = \log_\pi x$ 的圖形的上方，正確。

(3) $y = a^x$ 的圖形與 $y = \log_a x$ 的圖形的凹向性一致 $a > 1$ 凹向性相反； $0 < a < 1$ 凹向性一致

(4) $y = a^{-x}$ 的圖形與 $y = \log_a x$ 的圖形的遞增遞減性一致 遞增遞減性相反

$$(5) \text{若 } p > q > 0, \text{ 則 } \frac{e^p + e^q}{2} > e^{\frac{p+q}{2}} > e^{\sqrt{pq}} \quad \text{算幾不等式}$$

四、填充題 II(每題 8 分，共 40 分。)

A. (1.73, 4) $1.05^{200} = 10^{\log 1.05^{200}} = 10^{200 \times \log 1.05} = 10^{200 \times 0.0212} = 10^{4.23786} = 10^{0.23786} \times 10^4 \approx 1.7292 \times 10^4 \approx 1.73 \times 10^4$
 $\Rightarrow (a, n) = (1.73, 4)$

B. 2 (1) 真數為正 $\Rightarrow x^2 + 13x + 30 > 0$ 且 $7x + 46 > 0 \Rightarrow (x+3)(x+10) > 0$ 且 $7x > -\frac{46}{7} \Rightarrow x > -3$

$$(2) \log_5(x^2 + 13x + 30) = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{7x+46}\right) = \log_5(7x+46) \Rightarrow x^2 + 13x + 30 = 7x + 46 \Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$$

 $\Rightarrow (x-2)(x+8) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ 或 } -8 \text{ (不合)}$

C. (16, 1) $f(x) = y = x^{8-\log_2(x^4)} \Rightarrow \log_2 y = (8-4\log_2 x) \times \log_2 x = -4(\log_2 x)^2 + 8\log_2 x$

$$\text{令 } t = \log_2 x \text{ 可得 } f(x) = -4t^2 + 8t = -4(t^2 - 2t) = -4(t-1)^2 + 4$$

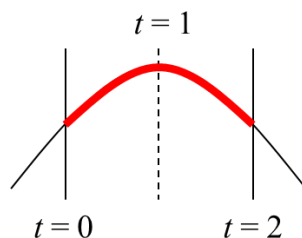
$$\because 1 \leq x \leq 4 \therefore \log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 4 \Rightarrow 0 \leq t \leq 2$$

如右圖，在 $t=1$ 時， $\log_2 y$ 有最大值 4

在 $t=0$ 或 $t=2$ 時， $\log_2 y$ 有最小值 0

即 在 $x = 2^t = 2^1 = 2$ 時， y 有最大值 $2^4 = 16$

在 $x = 2^0 = 1$ 或 $x = 2^2 = 4$ 時， y 有最小值 $2^0 = 1 \Rightarrow (M, m) = (16, 1)$ 。



D. 33 由題意可知 $n(A) = N_0 \times 4^{\frac{t}{2}}$ 、 $n(B) = N_0 \times 4^{\frac{t}{3}}$ 可得 $\frac{n(A)}{n(B)} = \frac{N_0 \times 4^{\frac{t}{2}}}{N_0 \times 4^{\frac{t}{3}}} = 4^{\frac{t}{2} - \frac{t}{3}} = 4^{\frac{t}{6}} > 2024$

$$\Rightarrow \frac{t}{6} > \log_4 2024 \Rightarrow t > 6 \times \log_4 2024 = 3 \times \log_2 2024 \geq 3 \times \log_2 2024 \approx 32.94 \approx 33$$

E. 47.55 公尺 下潛 h 小時後的光線強度為 $f(h) = (1 - 2.5\%)^h = 0.975^h$

$$\text{由題意知 } 0.975^h < 30\% = 0.3 \Rightarrow h < \frac{\log 0.3}{\log 0.975} \approx 47.55438563 \approx 47.55 (\text{公尺})$$

五、繪圖題(10 分)

答案如右圖

