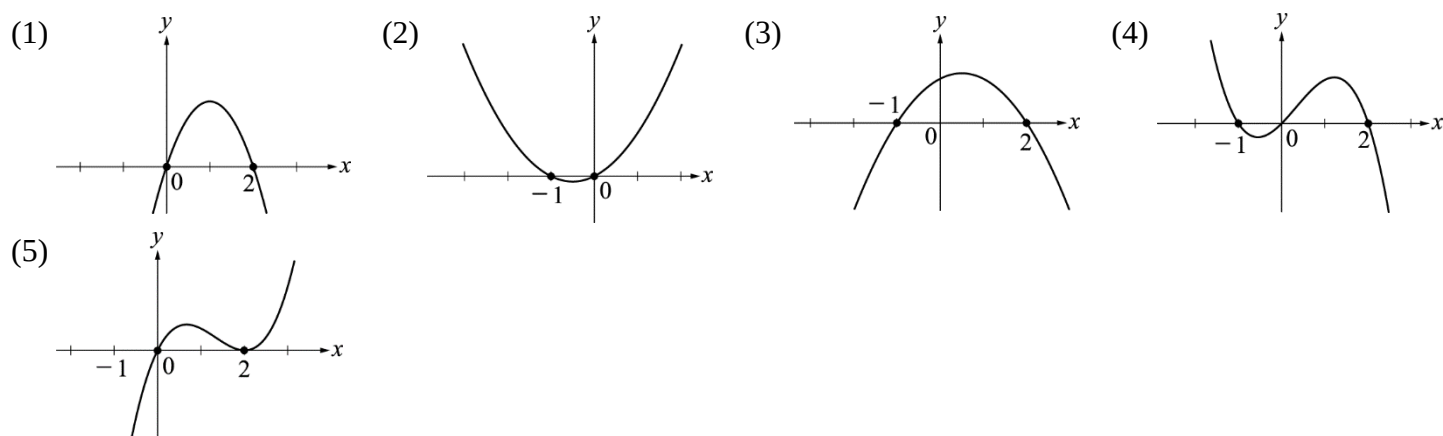
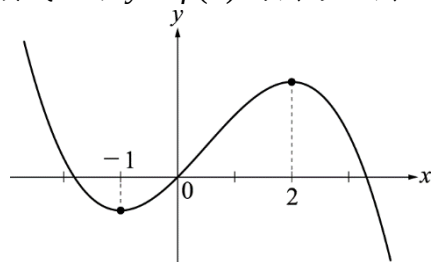


台北市立第一女子高級中學 113 學年度第一學期第二次期中考高三選修數甲試題

一、單選題（每題 5 分，共 20 分）

1. 三次多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形如圖，則其一階導函數 $f'(x)$ 的圖形最有可能是下列哪一個選項？



2. 設四次多項式函數 $f(x) = (x+3)(5-x)(x^2+1)$ ，若積分區間 $a \leq x \leq b$ ，使得定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 達到最大值，則 $b-a = ?$

- (1) 2 (2) 4 (3) 6 (4) 8 (5) 10。

3. 設函數 $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x < -1 \\ x^2+4x-2, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^3+3x+1, & x > 1 \end{cases}$ ，則下列哪一個選項 **錯誤**？

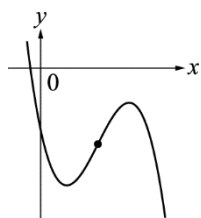
- (1) $f'(-2) = 2$ (2) $f'(-1) = 2$ (3) $f'(0) = 4$ (4) $f'(1) = 6$ (5) $f'(2) = 15$ 。

4. 2024 次多項式函數 $f(x) = \underbrace{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2024)}_{2024\text{個}}$ ，則 $f'(2024) = ?$

- (1) 0 (2) 2024 (3) 2023! (4) 2024! (5) 不存在。

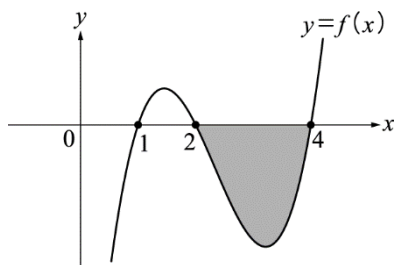
二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

1. 若三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形如圖，則下列哪些選項正確？



- (1) $a > 0$ (2) $b > 0$ (3) $c > 0$ (4) $d > 0$ (5) $b^2 - 4ac > 0$ 。

2. 如圖是函數 $y = f(x)$ 的圖形，已知 $\int_1^4 f(x)dx = -2.7$ ，塗色區域面積為 3.2，試選出正確的選項。



- (1) $\int_2^4 f(x)dx = 3.2$ (2) $\int_1^2 f(x)dx = 0.5$ (3) $\int_1^4 (2f(x)+1)dx = -2.4$ (4) $\int_1^2 f(x)dx - \int_2^4 f(x)dx = 3.7$
 (5) $\int_1^4 |f(x)|dx = 3.7$ 。

三、填充題（每題 5 分，共 50 分）

1. 若三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $x=1$ 時有極大值 5，在 $x=9$ 時有極小值 -1，則 $y = f(x)$ 圖形的反曲點坐標為_____。

2. 設 $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ ，若直線 L 與 $y = f(x)$ 之圖形相切於點 $P(1, 6)$ ，

(1) 直線 L 的方程式為_____。

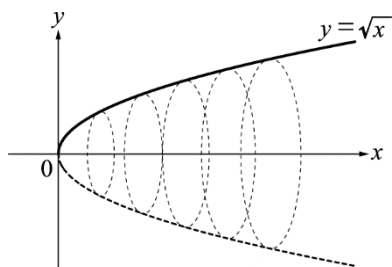
(2) 直線 L 與 $y = f(x)$ 的交點坐標為_____。（兩解）

3. 設三次多項式函數 $f(x) = x^3 + 1$ ，則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+8h) - f(3+h)}{3h} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. $\int_0^4 (|x-1| + |x-2|)dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

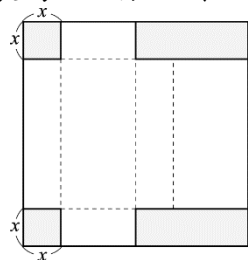
5. 兩函數 $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4$ 與 $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 4$ 的圖形所圍封閉區域的面積為_____。

6. 如圖，有一飛機模型的機鼻是 $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 6$ （單位：公分）繞 x 軸旋轉所形成的旋轉體，則此旋轉體體積為_____立方公分。



7. 已知三次多項式函數 $f(x)$ 的圖形在點 $(0, 1)$ 與直線 $y = x + 1$ 相切，在點 $(1, 3)$ 與直線 $y = 5x - 2$ 相切，則 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 將邊長 12 公分的正方形，如圖截去四個矩形形成長方體展開圖，再沿虛線摺成一個長方體。設截去的正方形之邊長為 x 公分，則此長方體的體積最大值为_____立方公分。



9. 設 a 為實數，若多項式函數 $f(x)$ 滿足 $\int_a^x f(t)dt = \frac{3}{5}x^5 - 4x^4 + 6x^3 + x + 2024$ ，則 $f(x)$ 之最小值為_____。

四、混合題 (共 10 分)

1. 作三次多項式函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ 的圖形，如果有極值發生的點、反曲點、與 y 軸交點，圖中必須標出坐標。
(作圖題)(4 分)
2. 若 $y = x^3 - 3x^2$ 的圖形與直線 $y = 9x + k$ 有三個相異的交點，則實數 k 的範圍為_____。(填充題)(2 分)
3. 若方程式 $x^3 - 3x^2 - 9x = k$ 有兩個相異正根，一個負根，則實數 k 的範圍為_____。(填充題)(2 分)
4. 若 $y = x^3 - 9x$ 的圖形與 $y = 3x^2 + k - 1$ 的圖形有三個相異的交點，其中有兩個在 y 軸的左側、一個在 y 軸的右側，則實數 k 的範圍為_____。(填充題)(2 分)

五、加分題 (共 8 分)(請寫出計算過程)

1. 求 $C: (x + 2\sqrt{2})^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 \leq 4$ 的圖形繞直線 $y = x$ 旋轉所得之旋轉體的體積。

台北市立第一女子高級中學 113 學年度第一學期第二次期中考高三選修數甲答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、單選題（每題 5 分，共 20 分）

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

1.	2.
----	----

三、填充題（每題 5 分，共 50 分）

1.	2.(1)	2.(2)	3.	4.
5.	6.	7.	8.	9.

四、混合題（共 10 分）

1. 作三次多項式函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ 的圖形，如果有極值發生的點、反曲點、與 y 軸交點，圖中必須標出坐標。
(作圖題)(4 分)

2.(填充題)(2 分)_____

3. (填充題)(2 分)_____

4. (填充題)(2 分)_____

五、加分題（共 8 分)(請寫出計算過程)

1. 求 $C: (x+2\sqrt{2})^2 + (y-2\sqrt{2})^2 \leq 4$ 的圖形繞直線 $y = x$ 旋轉所得之旋轉體的體積。

台北市立第一女子高級中學 113 學年度第一學期第二次期中考高三選修數甲答案卷

一、單選題（每題 5 分，共 20 分）

1. 3	2. 4	3. 4	4. 3
---------	---------	---------	---------

二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

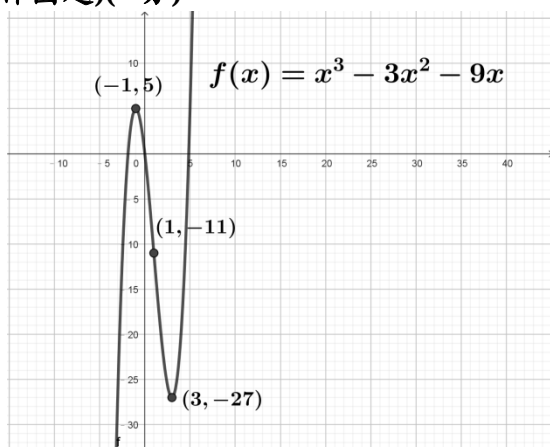
1. 25	2. 2345
----------	------------

三、填充題（每題 5 分，共 50 分）

1. (5,2)	2.(1) $y = 8x - 2$	2.(2) (1,6), (-4, -34)	3. 63	4. 9
5. $\frac{37}{12}$	6. 18π	7. $2x^3 - x^2 + x + 1$	8. 64	9. -26

四、混合題（共 10 分）

1. 作三次多項式函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ 的圖形，如果有極值發生的點、反曲點、與 y 軸交點，圖中必須標出坐標。
(作圖題)(4 分)



- 2.(填充題)(2 分) $-27 < k < 5$

3. (填充題)(2 分) $-27 < k < 0$

4. (填充題)(2 分) $1 < k < 6$

五、加分題（共 8 分）(請寫出計算過程)

1. 求 $C: (x+2\sqrt{2})^2 + (y-2\sqrt{2})^2 \leq 4$ 的圖形繞直線 $y = x$ 旋轉所得之旋轉體的體積。

<解>

方法 1. 將所有點順時針旋轉 45° ，相當於求

$C': x^2 + (y-4)^2 \leq 4$ 的圖形繞直線 x 軸旋轉所得之旋轉體的體積。

$$\text{旋轉體的體積} = \pi \int_{-2}^2 [(4 + \sqrt{4 - x^2})^2 - (4 - \sqrt{4 - x^2})^2] dx = \pi \int_{-2}^2 16\sqrt{4 - x^2} dx = 16\pi \times 2\pi = 32\pi^2$$

方法 2. 點 $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 到直線 $y = x$ 的距離 = $\frac{|-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 4$

$$\text{旋轉體的體積} = 4\pi \times (2\pi \times 4) = 32\pi^2$$