

新竹市新竹高中 113 上高一期末考

第壹部分：選擇（填）題（占 79 分）

一、單選題（占 5 分）

說明：第 1 題，每題 5 分。

1. 關於平面上的直線，下列敘述何者正確？

- (1) 若兩條直線互相垂直，則其斜率相乘之積必為 -1
- (2) 若兩條直線斜率相乘之積為 -1 ，則此兩直線互相垂直
- (3) 若兩條直線斜率相等，則此兩直線互相平行
- (4) 與 $3x + 4y + 1 = 0$ 垂直的直線，可假設為 $4x + 3y = k$ ，其中 k 為實數
- (5) 過 $P(1, 9)$ 的直線方程式可表示為 $y - 1 = m(x - 9)$ ，其中 m 為實數

二、多選題（占 18 分）

說明：第 2 題至第 4 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

2. 已知平面上有兩條與坐標軸不平行的直線 L_1 、 L_2 互相垂直，其斜率分別為 m_1 、 m_2 且 $m_1 > m_2$ 、 $|m_2| > 1$ 。請問下列哪些選項是正確的？

- (1) $m_1 m_2 = -1$
- (2) $|m_1| > |m_2|$
- (3) $|m_2| > m_1$
- (4) m_1 不可能小於 0
- (5) $m_1 - \frac{1}{m_1} < 0$

3. 在坐標平面上，下列哪些選項中條件恰可決定一個圓？

- (1) 通過三點 $(2, 4)$ 、 $(1, 5)$ 、 $(-1, 7)$
- (2) 通過四點 $(-5, -5)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(-6, 2)$ 、 $(2, -4)$
- (3) 與直線 $x + y = 2$ 、 $x = 0$ 、 $y = 0$ 都相切
- (4) 滿足 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 的 P 點軌跡，其中 A 點為 $(\sqrt{2}, 0)$ ， B 點為 $(\sqrt{13}, 0)$
- (5) 滿足 $\overline{PA} = \pi \overline{PB}$ 的 P 點軌跡，其中 A 點為 $(\sqrt{2}, 0)$ ， B 點為 $(\sqrt{13}, 0)$

4. 考慮坐標平面上以 $O(0, 0)$ 、 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 為頂點的三角形，令 C_1 、 C_2 分別為 $\triangle OAB$ 的外接圓、內切圓。請問下列哪些選項是正確的？

- (1) C_1 的半徑為 2
- (2) C_1 的圓心在直線 $y = x$ 上
- (3) C_1 的圓心在直線 $4x + 3y = 12$ 上
- (4) C_2 的圓心在直線 $y = x$ 上
- (5) C_2 的圓心在直線 $4x + 3y = 6$ 上

三、填充題（占 56 分）

說明：第 5 題至第 12 題，每題 7 分。

5. 小宇玩戰爭網路遊戲，在螢幕上有一坐標平面，飛機以等速直線前進，在坐標 $(20, 8)$ 的位置被發現，經過 1 秒後到達坐標 $(18, 8)$ ，再經 1 秒後，小宇從原點選一方向發射一飛彈，假設飛彈也以直線前進且速率跟飛機相同，而且飛彈剛好擊中飛機，則飛彈擊中飛機時的坐標為 $(\underline{5-1}, \underline{5-2})$ 。

6. 坐標平面上，圓 Γ 完全落在四個不等式： $x - y \leq 8$ 、 $x + y \leq 18$ 、 $x - y \geq -4$ 、 $x + y \geq -24$ 、所圍成的區域內，則 Γ 最大可能的面積為 $\underline{6-1} \underline{6-2} \pi$ 。

7. 已知 k 為實數，且方程組 $\begin{cases} x + ky - 1 = 0 \\ (k + 1)x + 6y - 3 = 0 \end{cases}$ 的幾何意義為兩平行直線，

則 $k = \underline{7-1} \underline{7-2}$ 。

8. 已知 a 、 b 、 c 為實數，設直線 $y = 5x + a - 7$ 與圓 $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y + b = 0$ 相切於 $P(c, -1)$ ，則 $(a, b, c) = (\underline{8-1}, \underline{8-2}, \underline{8-3}, \underline{8-4}, \underline{8-5})$ 。

9. 設平面上有一圓心為 O 的單位圓 $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ 及圓外一點 P ，過 P 對 Γ 作兩切線 L_1 、 L_2 ，已知 L_1 、 L_2 的銳夾角為 60° ，且 $\overline{OP}$ 斜率為 1。若 L_1 、 L_2 的斜率分別為 m_1 、 m_2 ，則 $|m_1 m_2| = \underline{9-1}$ 。

10. 設坐標平面上 $(7, 5)$ 處有一光源向四周發光，有一圓形障礙物其方程式為 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ ，若 x 軸為地面，則該圓形障礙物在地面上的影子長度為

$$\frac{\underline{10-1} \underline{10-2}}{\underline{10-3}} \text{。 (須化為最簡分數)}$$

11. 已知坐標平面上一點 $A(1, 6)$ 以及一圓 $\Gamma: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 1$ ，若分別在 y 軸、 x 軸及圓 Γ 上各找點 P 、 Q 、 R 使得 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QR}$ 有最小值，則此最小值為 $\underline{11-1}$ 。

12. 有一考古學家在搜尋兩千三百四十五年前的一座正方形古城遺址時，發現了四處城牆遺跡，經 GPS 定位並轉換成他手中的地圖坐標後，分別為 $A(-2, -13)$ 、 $B(-1, 4)$ 、 $C(22, -5)$ 、 $D(16, -17)$ 。後來繼續根據史料考證，確認這四處城牆遺跡分別落在正方形古城的四個邊上，則這座古城的面積為

$$\underline{12-1} \underline{12-2} \underline{12-3} \text{ 平方單位。}$$

第貳部分：混合題（占 21 分）

說明：本部分共有 2 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

13 — 14 題組

13. 已知平面上兩點 $A(1, 1)$ 、 $B(3, 3)$ ，請問在鉛直線 $x = 1 + 2\sqrt{2}$ 上可以找到幾個相異點 P 使得 $\triangle PAB$ 形成等腰三角形？（單選題，5 分）

- (1) 1
- (2) 2
- (3) 3
- (4) 4
- (5) 5

14. 承 13 題，當 k 之值為下列哪些選項時，可以在鉛直線 $x = k$ 上找到最多的相異點 P 使得 $\triangle PAB$ 形成等腰三角形？(多選題，6 分，6 - 4 - 2 - 0)

(1) $\frac{1}{2}$

(2) 1

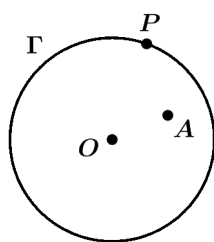
(3) $\frac{3}{2}$

(4) 2

(5) $\frac{5}{2}$

15 — 17 題組

15. 如圖所示，已知圓 Γ 、其圓心 O 及圓內一點 A ，且 P 是圓 Γ 上的動點。請在圓上找到兩點 P_1 、 P_2 使得 $\overline{AP_1} \geq \overline{AP} \geq \overline{AP_2}$ 對所有 P 都成立，並寫出其作法。(非選擇題，3 分)



16. 請證明依上題方法找出的點 P_1 與 P_2 滿足題意。(證明題，3 分)

17. 承第 15 題，設圓 $\Gamma: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 40 = 0$ 、點 $A(3, 3)$ ，求 $\overline{AP_1}$ 、 $\overline{AP_2}$ 之長度為何？(計算題，4 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 2

2. 1345 3. 25 4. 34

5. (6, 8)

6. 18π

7. -3

8. $(-4, -7, 2)$

9. 1

10. $\frac{16}{3}$

11. 9

12. 640

第貳部分：混合題

13. 4

14. 135

15. 略

16. 略

17. $\overline{AP_1} = 4\sqrt{5}$ 、 $\overline{AP_2} = 2\sqrt{5}$