

應試說明：

1. 請在答案卷上書寫班級、座號及姓名，未正確書寫則扣總成績 5 分。
2. 本次考試滿分為 102 分，超過 100 分以 100 分計。
3. 加油！祝各位同學期末歐趴！（ヾ・・・ヾ）

一、單選題（共 20 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 5 分。每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，若矩陣 X 滿足 $X - 2B = 3A$ ，則矩陣 X 為下列哪一個選項？

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & -9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

2. 設矩陣 $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ ，其中第 (i, j) 元 $a_{ij} = i^2 - 2j$ ，則矩陣 A 為下列哪一個選項？

(1) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

3. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ，若 $A^5 - 5A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a + b + c + d$ 之值為下列哪一個選項？

(1) 40 (2) 60 (3) 80 (4) 100 (5) 120

4. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -4 & -15 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ ，若矩陣 X 滿足 $AX + B = 2X$ ，則矩陣 X 為下列哪一個選項？

(1) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

二、多選題 (共 30 分)

說明：第 5 題至第 7 題，每題 10 分。每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。每個選項 2 分，所有選項均未作答者，該題得 0 分。

5. 設 A, B, C 皆為二階方陣， I 為二階單位方陣， O 為 2×2 階零矩陣，下列敘述中請選出必定正確的選項。

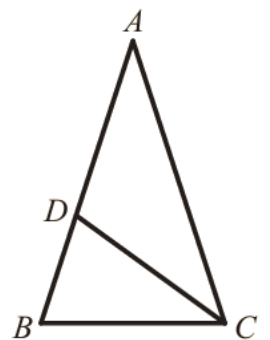
- (1) $AB = BA$ (2) 若 $AB = AC$ 且 $A \neq O$ ，則 $B = C$ (3) 若 $AB = AC$ 且 $\det(A) \neq 0$ ，則 $B = C$
(4) 若 $AB = BC$ 且 $\det(B) \neq 0$ ，則 $A = C$ (5) 若 A 的反方陣存在，則 $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1}$

6. 給定 x, y 的聯立方程式 $\Gamma: \begin{cases} ax + by = 3 \\ cx + dy = 2 \end{cases}$ ，設矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，其中 a, b, c, d 為實數。請選出正確的選項。

- (1) 若 $\det(A) \neq 0$ ，則 Γ 有解
(2) 若 Γ 有解，則 $\det(A) \neq 0$
(3) 若 $\det(A) = 0$ ，則聯立方程式 $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ 有無限多組解
(4) 若 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 Γ 有唯一解 $(x, y) = (7, -4)$
(5) 若 Γ 有唯一解 $(x, y) = (2, 5)$ ，則聯立方程式 $\Gamma: \begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = 5 \end{cases}$ 有唯一解 $(x, y) = (3, 2)$

7. 當一個等腰三角形的腰長與底邊長的比值為黃金比例 φ 時，我們稱此等腰三角形為黃金三角形。如圖，已知 $\triangle ABC$ 是一個黃金三角形，且 $\overline{AD} = \overline{BC} = 1$ ，試選出正確的選項。

- (1) $\overline{BD} = \varphi$ (2) $\triangle BDC$ 是一個黃金三角形 (3) $\overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (4) $\overline{CD}$ 是 $\angle ACB$ 的角平分線 (5) $\angle BAC = 36^\circ$



三、填充題 (共 30 分)

說明：第 8 題至第 12 題，每題 6 分，每格須全部答對才給分。

8. 設實數 x, y 滿足 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 16 \end{bmatrix}$ ，則 $x + 2y =$ _____。

9. 若實數 a, b, c, d 滿足 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 5 \\ -11 & -3 \end{bmatrix}$ ，則 $a + b + c + d =$ _____。

10. 已知二階方陣 A 的反方陣 A^{-1} 存在，且 $A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ ， $A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。若 $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \end{bmatrix}$ ，其中 x, y 為實數，則 $x + y =$ _____。

11. 若二階方陣 A, B 滿足 $A + 2B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $A - 2B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ，則 $A^2 - 4B^2 =$ 【_____】。

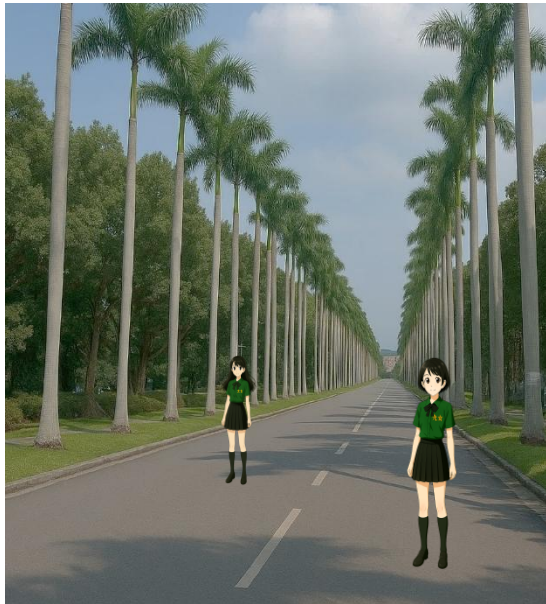
12. 已知費氏數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式： $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases} (n \geq 1)$ ，小綠想要結合自己所學，用矩陣的乘法來表示費氏數列的遞迴關係式。若二階方陣 A 滿足 $\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$ ，則方陣 $A =$ 【_____】。

四、混合題 (共 22 分)

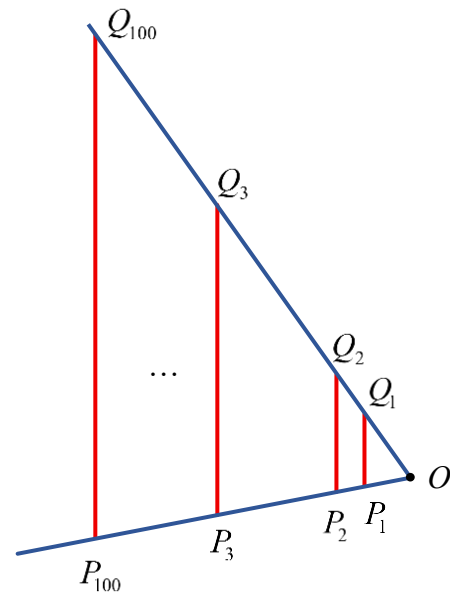
說明：本部分共有 1 題組，多選題每題 10 分，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。每個選項 2 分，所有選項均未作答者該題得 0 分。填充題每題 6 分，每格須全部答對才給分。

13-15 題為題組

鳳凰花開的 6 月是畢業的季節，小綠和小園相約在台大的椰林大道一起拍畢業照，如圖一所示。已知椰林大道左側有 100 棵與地面垂直且等高的椰子樹，樹底在同一直線上且間距皆相等。小綠以單點透視法在圖畫紙上繪製椰林大道左側的椰子樹，示意圖如圖二 (注意示意圖未按真實比例繪製，僅供參考用)，其中 O 為消失點。試回答下列問題。

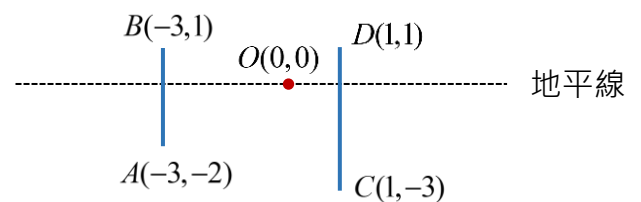


圖一



圖二

13. 設透視圖中第 k 棵椰子樹的樹底為點 P_k ，樹頂為點 Q_k ， $1 \leq k \leq 100$ ，請選出正確的選項。(多選題，10 分)
- (1) $Q_1, Q_2, \dots, Q_{100}$ 在同一條直線上 (2) $\overline{P_1P_2} : \overline{P_2P_3} = \overline{Q_1Q_2} : \overline{Q_2Q_3}$ (3) P_2 是 $\overline{P_1P_3}$ 的中點
- (4) 若 $\overline{P_3Q_3} = 2\overline{P_2Q_2}$ ，則 P_2 是 $\overline{P_1P_3}$ 的中點 (5) $\overline{P_1Q_3}$ 與 $\overline{P_3Q_1}$ 的交點在線段 $\overline{P_2Q_2}$ 上
14. 承上題，小綠在圖畫紙上設立坐標系，使得椰子樹皆與 y 軸平行，且消失點 O 為原點。若已知 $P_1(-12, -3)$ 、 $P_3(-24, -6)$ 、 $Q_1(-12, 3)$ 、 $Q_3(-24, 6)$ ，則點 Q_2 的坐標為 _____。(填充題，6 分)
15. 小園也將兩人的畢業照 (圖一) 以單點透視法畫在圖畫紙上，示意圖如下圖三，其中 O 為消失點，線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 分別代表小綠和小園。小園在圖畫紙上設立坐標系，使得 O 為原點且地平線與 x 軸平行。若已知 $A(-3, -2)$ 、 $B(-3, 1)$ 、 $C(1, -3)$ 、 $D(1, 1)$ ，且小園的身高為 152 公分，則小綠的身高為 _____ 公分。(填充題，6 分)



圖三

===== 試題結束 =====

二年_____班_____號，姓名：_____

作答說明：
1. 請在答案卷上書寫班級、座號及姓名，並用藍色或黑色原子筆以清晰之字跡作答，以免影響閱卷之結果。

一、單選題：

1.	2.	3.	4.

二、多選題：

5.	6.	7.

三、填充題：

8.	9.	10.	11.	12.

四、混合題：

13.	14.	15.

一、單選題：

1.	2.	3.	4.
5	4	3	2

二、多選題：

5.	6.	7.
35	134	245

三、填充題：

8.	9.	10.	11.	12.
0	23	1	$\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

四、混合題：

13.	14.	15.
125	$(-16,4)$	171