

彰化縣彰化高中 113 上高二期末考

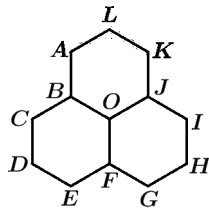
第壹部分：選擇（填）題（占 90 分）

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 5 分。

1. 如圖，將三個正六邊形拼貼，若 $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OE} + 6\overrightarrow{OF}$ ，則 P 點會落在圖中的哪一點？

- (1) G
- (2) H
- (3) I
- (4) J
- (5) K



2. 設 $\overrightarrow{OA} = (-1, 2)$ ， $\overrightarrow{OB} = (3, 1)$ ，若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ，其中 x, y 是實數，且 $-1 \leq x \leq 2$ ， $y = 2$ ，則所有 P 點所形成的圖形長度為？

- (1) $3\sqrt{5}$
- (2) $5\sqrt{3}$
- (3) $\sqrt{65}$
- (4) $2\sqrt{13}$
- (5) $\sqrt{15}$

3. $\triangle ABC$ 中，若 H 是 $\triangle ABC$ 中的垂心 (三角形三邊上的高交於一點，該點即為垂心)，且

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \text{ 求 } \cos \angle BAC = ?$$

(1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $-\frac{1}{2}$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\frac{1}{2}$

(5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 如圖， $A(-1, 3)$ ， $B(5, 10)$ ，且 $\overline{AD} \perp \overline{BO}$ 於 C 點，求 $\overrightarrow{OD}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 上的正射影為？

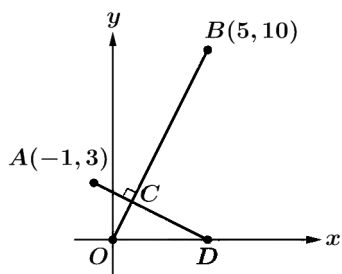
(1) $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(2) $(1, 2)$

(3) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

(4) $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

(5) $(2, 4)$



5. 空間中，四角錐 $P-ABCD$ 的底面是邊長為 1 的正方形 $ABCD$ ，稜 $\overline{PA}$ 垂直於底面 $ABCD$ ，且 $\overline{PA} = \sqrt{3}$ ，若 $\angle BPC = \theta$ ，求 $\sin \theta = ?$

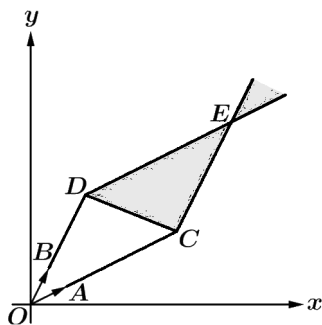
- (1) $\frac{1}{2}$
- (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (4) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- (5) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

二、多選題（占 15 分）

說明：第 6 題至第 8 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

6. 如圖，已知 O 為原點， $\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OB}$ ，若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ，其中 x, y 是實數，則下列哪些選項的 P 點落在陰影區域內（不含邊界）？

- (1) $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
- (2) $\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$
- (3) $\overrightarrow{OP} = 5\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$
- (4) $\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}$
- (5) $\overrightarrow{OP} = 6\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}$



7. 設平面上 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 兩向量所張成平行四邊形的面積為 5, 且 $\vec{a}$, $\vec{c}$ 兩向量所張成平行四邊形的面積為 2, 則由兩向量 $4\vec{a}$ 與 $3\vec{b} - 5\vec{c}$ 所張成平行四邊形的面積可能為?

- (1) 20
- (2) 40
- (3) 60
- (4) 80
- (5) 100

8. 在空間中, 下列敘述何者正確?

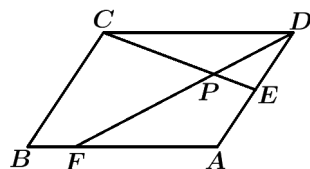
- (1) 兩直線為歪斜線的充要條件為兩直線不共平面
- (2) 兩歪斜線在一平面 E 上之正射影有可能為兩平行線
- (3) 過已知直線 L 外一點 P 恰有一平面與直線 L 平行
- (4) 設 E 為 $\overline{AB}$ 之垂直平分面, 若點 P 滿足 $\overline{PA} = \overline{PB}$, 則點 P 在平面 E 上
- (5) 設點 O 與直線 L 皆在平面 E 上, 但點 O 不在直線 L 上, 若點 P 為平面 E 外一點, A 為直線 L 上一點, $\overline{OP} \perp \overline{OA}$, $\overline{OA}$ 與直線 L 垂直, 且 $\overline{PA}$ 亦與直線 L 垂直, 則 $\overline{OP}$ 垂直平面 E

三、填充題 (占 50 分)

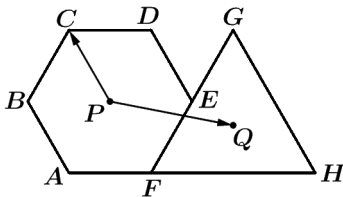
說明：第 9 題至第 18 題, 每題 5 分。

9. 已知 A, B, C 為不共線的三點, 若 $2x\overrightarrow{AB} + 3y\overrightarrow{BC} + 12\overrightarrow{CA} = \vec{0}$, 求數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

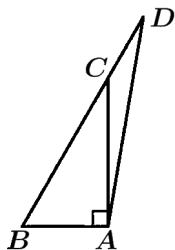
10. 如圖, 平行四邊形 $ABCD$ 中, E 為 $\overline{AD}$ 中點, F 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{BF} : \overline{FA} = 1 : 3$, 若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, 求 $x : y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



11. 如圖，坐標平面上有一正六邊形 $ABCDEF$ 與一正三角形 FGH ，已知 $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{FG} = 2$ ，若正六邊形與正三角形中心分別為 P, Q ，求 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ} =$ 【 】。



12. 如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = \sqrt{3}$ ，若 $\overline{BD} = \sqrt{2} \times \overline{BC}$ ，求 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} =$ 【 】。



13. 已知 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 皆為單位向量，且 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，求 $\left| 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} \right| =$ 【 】。

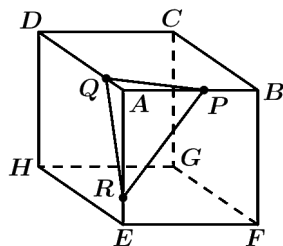
14. 已知兩直線 $L_1: (a-5)x - 4y = 5$ 與 $L_2: x + (3-2b)y = 3$ ，其中 $a > 0, b > 0$ ，若直線 L_1 與直線 L_2 垂直，求 $a^2 + 4b^2$ 的最小值為【 】。

15. 試求行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 3^6 - 15 \\ 3^5 + 5 & 3^{10} - 1 \end{vmatrix}$ 之值為【 】。

16. 設平面上三點 $A(x, 2), B(3, x), C(2x-1, 3)$ ，若 $-5 \leq x \leq 2$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積最大值為【 】。

17. 設 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{c} = (c_1, c_2)$ ，若數對 $(x, y) = (1, 6)$ 是滿足線性組合 $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$ 的唯一解，求滿足 $x\vec{a} + 3y\vec{b} = 4\vec{a} + 2\vec{c}$ 的數對 $(x, y) =$ 【 】。

18. 如圖， $ABCD - EFGH$ 為正立方體， P, Q, R 分別為 $\overline{AB}$ ， $\overline{AD}$ ， $\overline{AE}$ 上點，且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 2$ ， $\overline{AQ} : \overline{QD} = 1 : 4$ ， $\overline{AR} : \overline{RE} = 4 : 1$ ，若平面 PQR 與平面 AQR 所夾的兩面角為 θ ，求 $\tan \theta =$ 。



第貳部分：混合題（占 10 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

19 - 20 題組

已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AC} = 6$ ，則

19. 下列哪個向量可平分 $\angle BAC$ ？（多選題，4 分）

- (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- (2) $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$
- (3) $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- (4) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- (5) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

20. 若 $\overline{BC}$ 與 $\angle BAC$ 的角平分線交於 D 點，令 P 為 $\overline{AD}$ 上動點，求 $\overrightarrow{PA} \cdot (3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值為何？（非選擇題，6 分）

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 5 2. 1 3. 3 4. 2 5. 4

6. 25 7. 15 8. 1245

9. (6, 4)

10. 3 : 7

11. -4

12. $3\sqrt{2}$

13. 3

14. 17

15. 72

16. 17

17. (6, 4)

18. $\frac{3\sqrt{17}}{4}$

第貳部分：混合題

19. 35

20. $-\frac{4}{9}$