

113 學年度第一學期第三次定期考高三數甲試題

命題範圍：第二章積分

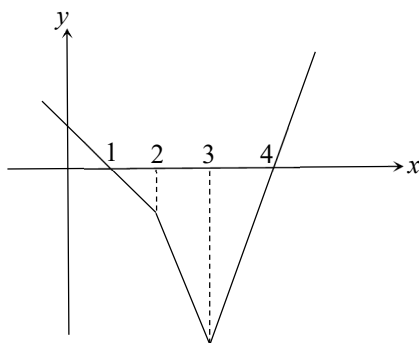
一、單選題（每題 5 分，共 5 分）

1. 右圖為函數 $f(x)$ 的部分圖形，令

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \text{ 且 } 0 \leq x \leq 4. \text{ 若當 } x = M$$

時， $F(x)$ 有最大值，當 $x=m$ 時， $F(x)$ 有最小值，則數對 (M, m) 為下列哪個選項？

- (A) (0,1) (B) (0,3) (C) (1,2)
(D) (1,3) (E) (1,4)



二、多重選擇題（每題 7 分，共 21 分）

每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 7 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 已知連續函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 為遞增函數，將區間 $[a, b]$ 分割為 n 個等

長的小區間 $[x_{i-1}, x_i]$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，其中 $x_0 = a$ ， $x_n = b$ ，令

$$R_n = \frac{b-a}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)),$$

$$L_n = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})),$$

A 為連續函數 $f(x)$ 與 x 軸、直線 $x=a$ 和直線 $x=b$ 所圍之區域面積，則下列選項何者正確？

(A) $0 \leq R_n - L_n \leq \frac{b-a}{n}$ (B) $R_n - \int_a^b f(x)dx \leq \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n - L_n) = 0$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = A$ (E) $A \geq \int_a^b f(x)dx$

2. 已知 $f(x)$ 為連續函數，且 $F_1(x) = \int_1^x f(t)dt$ ， $F_2(x) = \int_2^x f(t)dt$ ，

$F_3(x) = \int_3^x f(t)dt$ ，則下列選項何者正確？

(A) $F_1'(x) = F_2'(x)$ (B) $\int_1^2 f(t)dt = F_2(x) - F_1(x)$

(C) $F_3(x) - F_2(x) = F_2(x) - F_1(x)$ (D) $2F_1(x) = F_2(x)$

(E) $F_1(1) = F_2(2) = F_3(3)$

3. $f(x)$ 為多項式函數，且 $f(x) = \int_0^x f(t)dt + x^4 + x^3 - x^2 + x - 29$ ，下列選項何者正確？

(A) $f(x)$ 的次數為 3 (B) $f(x)$ 的常數項為 -29

(C) $f(x)$ 的最高次項係數為 4 (D) $f(x)$ 的一次項係數為 -29

(E) $f(-1) = -12$

三、填充題 (每格 6 分，共 60 分)

1. 考慮函數 $f(x) = x^3$ 、直線 $x = 0$ 、直線 $x = 3$ 及 $y = 0$ 所圍成的區域，將區間 $[0, 3]$ 分成 6 等分，則黎曼上和 U_6 之值為_____。

2. 試求下列各值：

(1) $\int_{-2}^3 (1 - |x-1|)dx =$ _____。

(2) $\int_{-2}^2 (x^3 \cos x)dx =$ _____。

3. 曲線 $y = x^2 + 1$ 和直線 $y = -x + 3$ 所圍成的封閉區域面積之值為_____。

4. 已知兩多項式函數 $f(x) = x^3 + 1$ 和 $g(x)$ 在 $x > 0$ 時，均滿足不等式 $f(x) \geq g(x)$ ，令 a 為一正實數，若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 y 軸與直線 $x = a$ 所圍的區域面積為 $\frac{2}{3}a^3 + 3a^2$ ，則 $g(1)$ 之值為_____。

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n} \right)^2 \right)$ 之值為_____。
6. 已知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，且 $f(1) = 1$ ， $f(-1) = -1$ ，
 $\int_{-1}^1 (bx^2 + cx + d)dx = 1$ ，則數對 (b, d) 為_____。
7. 坐標平面上拋物線 $y = \frac{1}{3}x^2$ 、圓 $x^2 + y^2 = 4$ 與 y 軸在第一象限所圍的封閉區域為 S ，則
(1) S 的面積之值為_____，
(2) S 繞 x 軸旋轉所得之旋轉體體積之值為_____，
(3) S 繞 y 軸旋轉所得之旋轉體體積之值為_____。

四、計算證明題：(共 14 分)

已知多項式函數 $f(x) = x(4 - x)$ 與直線 $L: y = mx$ ($m > 0$)，所圍封閉區域為 S 。

- (1) 若 $f(x)$ 與 x 軸所圍封閉區域 A ，則 A 的面積為何？(6 分)
(2) 承(1)，若 S 面積為 A 面積的一半，則 m 之值為何？(8 分)