

高雄市高雄中學 113 上高一第二次期中考

一、多選題（占 21 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 7 分。(7-4-1-0)

1. 下列級數的敘述何者正確？

$$(1) \sum_{k=1}^n (2nk) = n^2$$

$$(2) \sum_{k=1}^{10} 2^k \geq \sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$(3) \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{10} a_{2k} + \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$$

$$(4) \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k$$

$$(5) \sum_{k=1}^n (c + a_k) = c + \sum_{k=1}^n a_k, \text{ 其中 } c \text{ 為實數}$$

2. 已知聯立不等式 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x+ay+b \leq 0 \\ cx+dy+d \geq 0 \end{cases}$ 之解的範圍如圖，請判斷下列何者正確？

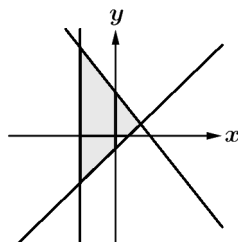
$$(1) a < 0$$

$$(2) b > 0$$

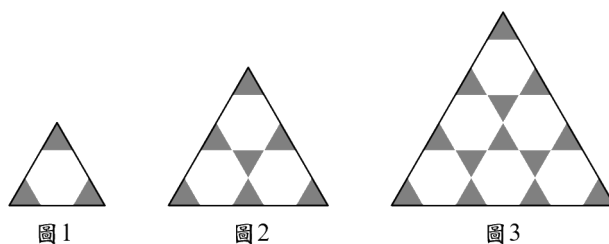
$$(3) c < 0$$

$$(4) cd < 0$$

$$(5) a、b、c、d \text{ 中恰有二個正數}$$



3. 用白色的正六邊形與黑色的正三角形地磚依照如下的規律拼成大三角形，其中第 1 個圖由 1 個正六邊形與 3 個正三角形所形成；第 2 個圖由 3 個正六邊形與 7 個正三角形所形成； $\cdots$ 依此類推。



設第 n 個圖由 a_n 個正六邊形地磚與 b_n 個正三角形地磚所拼成，請選出正確的選項。

- (1) $b_6 = 43$
- (2) $a_{11} = 65$
- (3) $a_{n+1} - a_n = n$ 對所有的正整數 n 都成立
- (4) $b_n = 2a_n + 1$ 對所有的正整數 n 都成立
- (5) $b_n > n^2 + 1$ 對所有的正整數 n 都成立

二、填充題（占 64 分）

說明：第 4 題至第 12 題。									
總對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分	8	16	24	31	38	45	52	58	64

4. $\begin{cases} a_1 = 7 \\ 3a_{n+1} - 2a_n = -2 \end{cases} \quad (n \geq 2, n \text{ 為正整數})$ ，求 $a_8 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 若 a 、 b 、 c 、 d 為非零實數，已知 $x + \frac{b}{a}y = \frac{1}{a}$ 和 $\frac{c}{d}x + y = \frac{1}{d}$ 過點 $(-4, 3)$ ，求過 $(2a, -3b)$ 、 $(2c, -3d)$ 的直線方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 在坐標平面上，滿足 $\begin{cases} |x-1| + |y+2| \leq 3 \\ |x-1| + |y+1| \leq 0 \end{cases}$ 之區域面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. $\sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 設 a 為正整數，若直線 $L_1: ax - 4y - 6 = 0$ 與直線 $L_2: 3x - (a+1)y = 16$ 平行，求 L_1 與 L_2 的距離為【 】。
9. x 為實數，則 $f(x) = \sqrt{(x+1)^2 + (3x-7)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (2-3x)^2}$ 的最小值為【 】。
10. 已知三直線 $L_1: 2x + y - 12 = 0$, $L_2: 2x - y + 4 = 0$, $L_3: x - 2y - 4 = 0$ 圍成一個三角形，此三角形內切圓半徑為【 】。
11. 過 $P(1, -1)$ 之直線交 $3x + y - 6 = 0$, $x - 2y + 12 = 0$ 於 A, B ，若 $\overline{AB}$ 中點為 P ，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 之方程式為【 】。
12. 已知 $n \in \mathbb{N}$ ，在 xy 平面上，正方形 D_n 的四個頂點為 $(2n, 0)$, $(2n+1, 0)$, $(2n+1, 1)$, $(2n, 1)$ 。今有 n 個正方形 $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n$ ，連接 $(2n, 1)$ 與原點的直線為 L ，試求此 n 個正方形在直線 L 下方部分的面積總和為【 】。

三、計算題（占 15 分）

說明：第 13 題。

13. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 之前 n 項和為 S_n 且 $S_n = \left(\frac{a_n + 1}{2} \right)^2$, $a_n \in \mathbb{N}$
- (1) 請問 a_3, a_4 分別為何？並推測 a_n 的值。（以 n 表示）(4 分)
- (2) 請利用「數學歸納法」證明 (1) 的結果是正確的。(5 分)
- (3) 若 $b_n = (-1)^n S_n$ ，則 $\langle b_n \rangle$ 的前 n 項和 T_n 為何？(以 n 表示)(6 分)

参考答案

1. 23 2. 345 3. 145

4. $-\frac{358}{243}$

5. $2x + y + 1 = 0$

6. 8

7. $\frac{n^2 + 3n}{4}$

8. 2

9. $3\sqrt{10}$

10. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

11. $41x + 23y - 18 = 0$

12. $\frac{2n^2 + 3n - 1}{4n}$

13. (1) $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_n = 2n - 1$; (2) 略 ; (3) $T_n = (-1)^n \times \frac{n(n+1)}{2}$