

113 學年度第二學期第一次定期考高三數甲試題

命題範圍：第一章隨機變數、第二章複數平面

一、多選題（每題 7 分，共 28 分）

第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 7 分；答錯 1 個選項者，得 4.2 分；答錯 2 個選項者，得 1.4 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 已知隨機變數 X, Y 之間滿足 $Y = aX + b$ 的關係，其中 a, b 為實數。

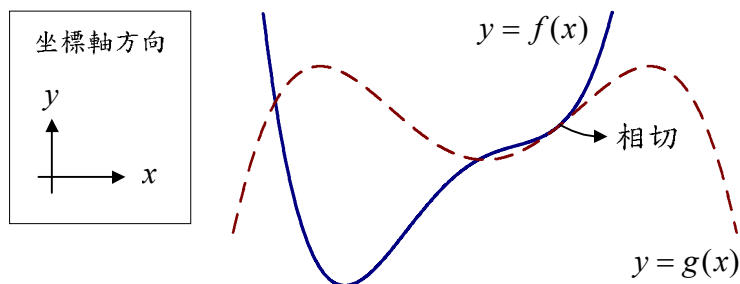
試選出正確的選項。

- (1) $E(Y) = a \cdot E(X) + b$
- (2) $\sigma(Y) = a \cdot \sigma(X) + b$
- (3) $\sigma(Y) = a \cdot \sigma(X)$
- (4) $Var(Y) = a \cdot Var(X)$
- (5) $Var(Y) = a^2 \cdot Var(X)$

2. 已知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 為實係數三次多項式，且 $f(2+i) = 1+2i$, $f(3+4i) = 0$ 。試選出正確的選項。

- (1) $f(3-4i) = 0$
- (2) $f(2+3i) \neq 0$
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ 恰有一個實根
- (4) 方程式 $f(x) = 1+2i$ 必有實根
- (5) 方程式 $f(x) = 1+2i$ 可能存在二個共軛虛根

3. 已知多項式函數 $y = f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 20x$ 與 $y = g(x) = -x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 10x + 9$ 的圖形相交如下。試選出正確的選項。



- (1) 方程式 $f(x)-g(x)=0$ 在開區間 $(-3,-2)$ 內恰有 1 個實根
 (2) 方程式 $f(x)-g(x)=0$ 在開區間 $(0,1)$ 內恰有 1 個實根
 (3) 方程式 $f(x)-g(x)=0$ 在開區間 $(0,1)$ 內恰有 3 個實根
 (4) 方程式 $f(x)-g(x)=0$ 在開區間 $(1,2)$ 內無實根
 (5) 方程式 $f(x)-g(x)=0$ 在開區間 $(2,3)$ 內無實根
4. 已知 $z + \frac{1}{z}$ 為實數， ω 為 1 的一個 n 次方根。試選出正確的選項。

- (1) $\bar{z} - \frac{1}{z}$ 為實數
 (2) 若 $z^2 - \omega^2 > 0$ ，則 $z^2 > \omega^2$
 (3) 若 $z + \omega > 0$ ， $z\omega > 0$ ，則 $z > 0$ ， $\omega > 0$
 (4) 若 $z^2 < 0$ ，則 $z^{14} = z^2$
 (5) 若 z 為虛數，則 $|z - \omega| \leq 2$

二、選填題（每小題 6 分，共 72 分）

本大題共有 6 題，分為 12 小題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (5-33)。每小題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

1. 將下列複數化成 $a + bi$ （其中 a, b 為實數）的形式。

(1) $3\sqrt{6} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} + \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2} + i = \underline{\textcircled{5}\sqrt{6} + \frac{\textcircled{6}}{3}i}$ 。

(2) $(3+4i) - (2-i) = \underline{\textcircled{7} + \textcircled{8}i}$ 。

(3) $\frac{4+3i}{2-i} = \underline{\textcircled{9} + \textcircled{10}i}$ 。

(4) $(1-\sqrt{3}i)^9 = \underline{\textcircled{11}\textcircled{12}\textcircled{13}\textcircled{14}}$ 。

2. 袋中有大小相同的紅球 6 顆、黑球 x 顆。每次從袋中隨機取出 1 球，觀察顏色並記錄後再放回袋中。假設每顆球被取到的機率均等，且每一次取球皆為獨立事件。

- (1) 如此重複取球 n 次，若以隨機變數 X 表示 n 次取球中取到紅球的個數，

則 X 的機率分布為二項分布。已知 X 的期望值 $E(X)=12$ 、標準差 $\sigma(X)=2$ ，則數對 $(n, x) = (\textcircled{15} \textcircled{16}, \textcircled{17})$ 。

- (2) 重複取球，直到取到紅球才停止。若以隨機變數 Y 表示第一次取到紅球所需的次數，則 Y 的機率分布為幾何分布。已知 Y 的期望值 $E(Y)$ 為其標準差 $\sigma(Y)$ 的 2 倍，則 $x = \underline{\textcircled{18}}$ 。

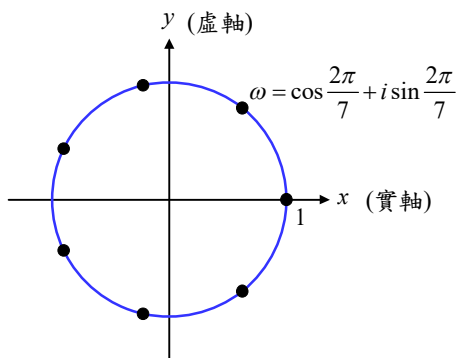
3. 已知隨機變數 X 的標準差 $\sigma(X)=\sqrt{13}$ ，且其機率分布如下表，

$$\text{則 } P(X=1)=p_1 = \frac{\textcircled{19}}{\textcircled{20}}。$$

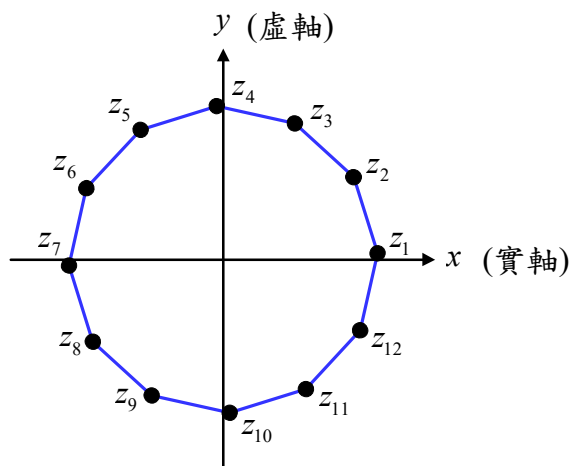
隨機變數 X 的值 k	1	6	10
$P(X=k)$	p_1	p_2	$\frac{1}{4}$

4. 如下圖所示，已知 1 的七次方根在複數平面上將單位圓七等分，依此可計算

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{\textcircled{21} \textcircled{22}}{\textcircled{23}}。 \text{ (請化為最簡分數)}$$



5. 如下圖所示，方程式 $z^{12} = 7 + \sqrt{15}i$ 的 12 個根在複數平面上決定了一個十二邊形。試回答下列問題。



(1) 此十二邊形之面積為 ②4 $\sqrt{②5}$ 。

(2) 令 $z = \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1}$ 的極式為 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$,

其中 $r = |z| =$ ②6 $+$ $\sqrt{②7}$, 主幅角 $\theta =$ ②8 ②9 度。

(3) 計算 $\sum_{n=2}^{12} |z_n - z_1|^2 =$ ③0 ③1 $\sqrt{③2}$ 。

6. 已知 $1+i$ 為方程式 $x^3 - 7x^2 + (16+a)x - (12+3a) = 0$ 的一個根 ,

則此方程式的實根為 ③3 。