

# 113 學年度第二學期第一次定期考高一數學試題

命題範圍：第一章數列與級數、第二章數據分析

## 一、多選題（每題 7 分，共 28 分）

- 若數列 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，公差為 $-2$ ，前 $n$ 項之和以 $S_n$ 表示，已知 $S_{25} = S_{30}$ ，請選出正確的選項。
  - (1)  $a_1 < 0$
  - (2)  $a_{24} + a_{25} + a_{26} + a_{27} + a_{28} + a_{29} + a_{30} + a_{31} + a_{32} = 0$
  - (3)  $|a_{53}| < a_2$
  - (4)  $S_n$ 的最大值為 756
  - (5)  $a_{22}^3 + a_{23}^3 + a_{24}^3 + a_{25}^3 + a_{26}^3 + a_{27}^3 = 3528$
- 設一數列 $5, 2, 4, 2, 10, 2, x$ 。將此數列的算術平均數 $\mu$ 、中位數 $Me$ 及眾數依照由小到大次序排列，形成一公差為正數的等差數列。請選出正確的選項。
  - (1) 所有可能的 $x$ 之總和為 20
  - (2) 算術平均數 $\mu$ 必為奇數
  - (3) 中位數 $Me$ 必為奇數
  - (4) 若 $5, 2, 4, 2, 10, 2, x$ 的標準差為 $\sigma$ ，則 $2 < \sigma < 6$
  - (5)  $5, 2, 4, 2, 10, 2, x$ 的第 40 百分位數為 2
- 已知兩變數 $x$ 與 $y$ 的數據如下：

|     |   |     |     |   |
|-----|---|-----|-----|---|
| $x$ | 1 | 3   | 1   | 3 |
| $y$ | 2 | $a$ | $b$ | 0 |

以最小平方方法求出 $y$ 對 $x$ 的迴歸直線方程式為 $y = -x + 4$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $y$ 的平均數為 2
- (2)  $x$ 的標準差小於 $y$ 的標準差
- (3)  $x$ 與 $y$ 的相關係數為 $-\frac{1}{2}$
- (4)  $a - b = 2$
- (5)  $a = 1$

4. 已知兩變數  $x$  與  $y$  的平均數  $\mu_x=60$  ,  $\mu_y=70$  , 標準差分別為正數  $\sigma_x$  、

$\sigma_y$  ,  $x$  與  $y$  的相關係數為 0.8 , 又迴歸直線方程式通過點(20,40) 。請選出正確的選項。

(1)  $y$  對  $x$  的迴歸直線的斜率為 0.8

(2)  $x$  的標準差小於  $y$  的標準差

(3)  $y$  對  $x$  的迴歸直線通過點(56 , 67)

(4) 若  $x' = 3x + 2$  ,  $y' = 10 - 2y$  , 則  $x'$  與  $y'$  的相關係數為 0.8

(5) 若  $x'' = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$  ,  $y'' = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}$  , 則  $y''$  對  $x''$  的迴歸直線為  $y'' = 0.8x''$

## 二、選填題（每格 7 分，共 63 分）

A. 已知數列  $\langle na_n \rangle$  , 若對所有正整數  $n$  , 此數列前  $n$  項之和

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n^2 + 3n + 3$  , 則  $a_1 + 4a_8$  之值為 ⑤⑥ 。

B. 阿建公司統計發現 112 年與 113 年營業額的成長率分別為 25%、28% , 若 112 年、113 年、114 年這三年營業額的平均成長率要大於或等於 40 % , 則 114 年的成長率至少要為 ⑦⑧.⑨ % 。

C. 從正整數數列 1, 2, 3,  $\cdots$  中, 刪去所有的完全平方數 ( $1^2, 2^2, 3^2, \cdots$ ) 之後, 仍維持由小到大的順序得到一個新的數列, 若新數列前 225 項的和為  $160k$  , 則正數  $k$  為 ⑩⑪⑫ 。

- D. 數列 $\langle a_n \rangle$ 成等比數列，且對所有正整數 $n$ ， $a_n > 0$ 。若第 11 項至第 30 項之和 $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{30} = 18$ ，第 31 項至第 50 項之和 $a_{31} + a_{32} + a_{33} + \cdots + a_{50} = 72$ ，

則前 90 項之和 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{90} = \underline{\textcircled{13}\textcircled{14}\textcircled{15}\textcircled{16}}$ 。

- E. 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 $n$ 項之和以 $S_n$ 表示，若 $S_{2n} = 100$ 且 $S_{3n} = S_n + 200$ ，

又 $S_{2n} = S_n + k$ ，則 $k$ 之值為  $\textcircled{17}\textcircled{18}$ 。

- F. 已知正數 $p$ 與整數 $q$ 使得數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = p \cdot a_{n-1} + q ; \text{當 } n \geq 2 \end{cases}$ ，若 $a_2 = 2$ ， $a_4 = 14$ ，且對所有正整數 $n$ ， $a_n = \alpha \cdot \gamma^n + \beta$ ，其中 $\gamma$ 為正整

數，則 $\alpha + \beta + \gamma$ 之值為  $\frac{\textcircled{19}\textcircled{20}}{\textcircled{21}}$ 。（化成最簡分數）

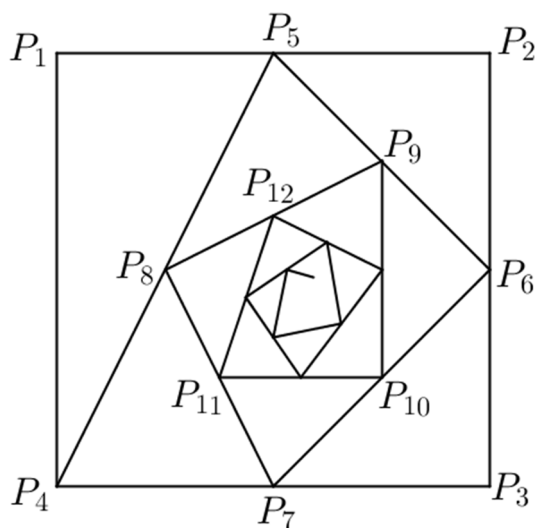
- G. 假設某班的甲、乙兩組學生成績如下：

甲組有 10 人，平均成績為 80 分，標準差 14 分；乙組有 20 人，平均成績為 65 分，標準差 11 分。

若此班 30 人之標準差為 $\sigma$ 分，且 $n \leq \sigma < n+1$ ， $n$ 為正整數，

則 $n$ 為  $\textcircled{22}\textcircled{23}$ 。

- H. 假設某班第一次段考國文成績( $x$ )與數學( $y$ )成績統計如下：國文科平均  $\mu_x = 45$  分、標準差  $\sigma_x = 6$  分；數學科平均  $\mu_y = 40$  分、標準差  $\sigma_y = 12$  分，且國文和數學的相關係數為  $r = 0.7$ ；因為成績不理想，老師決定調整成績，將每個人的國文成績( $x$ )都分別乘上 0.6 後，再加 40 分，且將每個人的數學成績( $y$ )都分別乘上 0.6 後，再加 40 分，得到調整後的國文成績( $x'$ )與數學成績( $y'$ )，若調整後的  $y'$  對  $x'$  的迴歸直線方程式為  $y' = mx' - k$ ，則序組( $m, k$ )為 (24, 25), (26, 27), (28)。
- I. 直角坐標平面上四點  $P_1(0,2), P_2(2,2), P_3(2,0), P_4(0,0)$  圍成一個正方形，假設  $P_5$  為  $\overline{P_1P_2}$  之中點， $P_6$  為  $\overline{P_2P_3}$  之中點， $P_7$  為  $\overline{P_3P_4}$  之中點， $P_8$  為  $\overline{P_4P_1}$  之中點，以此步驟繼續下去。設  $P_n$  的坐標為  $(x_n, y_n)$ ，對所有正整數  $n$ ，則  $(x_{300} + 2x_{301} + 2x_{302} + 2x_{303})(y_{300} + 2y_{301} + 2y_{302} + 2y_{303})$  之值為 (29, 30)。



### 三、混合題（共 9 分）

1. 三邊長為正整數的三角形稱為丟番圖三角形。若  $a_n$  表示最大邊長為  $n$  的丟番圖三角形的個數，例如：

當  $n=1$  時，三邊邊長為  $(1,1,1)$ ，只有 1 種，即  $a_1=1$ ；

當  $n=2$  時，三邊邊長為  $(2,2,2), (2,2,1)$ ，共 2 種，即  $a_2=2$ ；

當  $n=3$  時，三邊邊長為  $(3,3,3), (3,3,2), (3,3,1), (3,2,2)$ ，共 4 種，即  $a_3=4$ ；

試回答以下問題：

(1)  $a_4$  之值為下列哪個選項？ ③① （單選題，3 分）

(1)5 (2)6 (3)7 (4)8 (5)9

(2)  $\frac{1}{a_{42}} + \frac{1}{a_{44}} + \frac{1}{a_{46}} + \frac{1}{a_{48}} + \frac{1}{a_{50}} + \frac{1}{a_{52}} + \frac{1}{a_{54}}$  之值為  $\frac{\textcircled{32}}{\textcircled{33}\textcircled{34}}$ 。（化成最簡分

數）（選填題，6 分）