

台北市師大附中 113 上高二期末考

一、單選題（占 4 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 4 分。

1. 下列關係式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{16^2 + 29^2} + \sqrt{32^2 + 58^2} > \sqrt{48^2 + 87^2}$

(2) $\sqrt{1600^2 + 1600^2} + \sqrt{32^2 + 10^2} = \sqrt{1632^2 + 1610^2}$

(3) $(7^2 + 96^2)(230^2 + 17^2) < (1610 + 1632)^2$

(4) $(35^2 + 32^2)(46^2 + 51^2) = (1610 + 1632)^2$

(5) $[230^2 + (-8)^2][(-240)^2 + 7^2] > (1610 + 1632)^2$

二、多選題（占 36 分）

說明：第 2 題至第 7 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

2. 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 為平面上非零之相異向量，請選出正確的選項。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

(2) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$

(4) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

(5) 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，則 $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$

3. 如圖， $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AC}$ ，且四邊形 $ADEF$ 為平行四邊形，試問下列哪個向量的終點 P 落在 $\triangle ADE$ 內部 (不含邊界)？

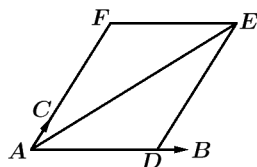
(1) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

(3) $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

(4) $\overrightarrow{AP} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$

(5) $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$



4. 若 a 、 b 、 c 、 d 為非零之相異實數，請選出正確的選項。

(1) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b+ka & a \\ d+kc & c \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & u \end{vmatrix}$

(4) 若 a 、 b 均為正數，則 $\begin{vmatrix} \log_2 a^3 & \log_3 b^6 \\ \log_2 a^4 & \log_3 b^8 \end{vmatrix} = 0$

(5) $\begin{vmatrix} a \cdot \cos \theta & b \cdot \cos \theta \\ c \cdot \cos(-\theta) & d \cdot \cos(-\theta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \cdot (\sin \theta + 1) & b \cdot (\sin \theta - 1) \\ c \cdot (\sin \theta + 1) & d \cdot (\sin \theta - 1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

5. 在平面上 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{CA} = 4$ ，且 $\vec{AO} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ ，請選出下列正確的選項。

(1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{5}{2}$

(2) 若 O 為 $\triangle ABC$ 的內心，則 $(x, y) = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$

(3) 若 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則 $(x, y) = \left(\frac{16}{35}, \frac{3}{7}\right)$

(4) 若 O 為 $\triangle ABC$ 的重心，則 $x = y$

(5) 若 O 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則 $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = \vec{AO} \cdot \vec{AC}$

6. $\triangle ABC$ 中，已知 $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$ ，且 $\overline{PA} = 2$ ， $\overline{PB} = 6$ ， $\overline{PC} = 2\sqrt{7}$ ，請選出下列正確的選項。

(1) P 為 $\triangle ABC$ 的垂心

(2) $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = -6$

(3) $\angle APB = 150^\circ$

(4) $\overline{AB} = 2\sqrt{13}$

(5) $\triangle ABC$ 的面積為 $9\sqrt{3}$

7. 如圖，正六邊形的邊長為 a ， O 為中心， $\vec{AB} \cdot \vec{AO} = k$ 。請選出下列正確的選項。

(1) $a^2 = k$

(2) $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 2k$

(3) $\vec{OC} \cdot \vec{OE} = -k$

(4) $\vec{DF} \cdot \vec{DB} = 6k$

(5) $\vec{AC} \cdot \vec{BE} = -3k$

3

三、填充題（占 60 分）

說明：第 8 題至第 16 題，每格 5 分。

8. 設 x, y 為實數， $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (3, 4)$ ，若 $(2x - y)\vec{a} + (x + 2y - 5)\vec{b} = \vec{0}$ ，則數對 $(x, y) = (\textcircled{8-1}, \textcircled{8-2})$ 。

9. 設平面上三點 $A(4, 1)$, $B(2, -1)$, $C(0, 5)$, 請回答下列各題：

(1) $\triangle ABC$ 的面積為 $\textcircled{9-1}$ 。

(2) 若四邊形 $ABCD$ 為一平行四邊形，則 D 點坐標為 $(\textcircled{9-2}, \textcircled{9-3})$ 。

(3) 若 E 點在 $\overline{BC}$ 上， $\overrightarrow{AE}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right)$,

則 E 點坐標為 $\left(\frac{\textcircled{9-4}}{\textcircled{9-5}}, \frac{\textcircled{9-6} \textcircled{9-7}}{\textcircled{9-8}}\right)$ 。

(4) 若 $\overline{AF}$ 為 $\angle BAC$ 之角平分線， F 點在 $\overline{BC}$ 上、 P 為 $\overline{AF}$ 上一動點，

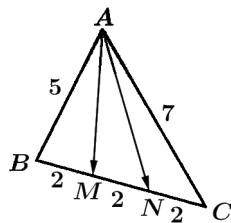
求 $\overrightarrow{PA} \cdot (2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值為 $\frac{\textcircled{9-9} \textcircled{9-10} \textcircled{9-11}}{\textcircled{9-12}}$ 。

10. 已知 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 且當 $t = t_0$ 時 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 有最小值 m , 則數對

$(t_0, m) = \left(\textcircled{10-1} \textcircled{10-2}, \sqrt{\textcircled{10-3}}\right)$ 。

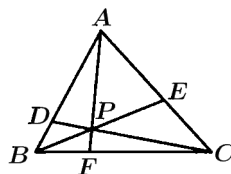
11. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{AC} = 7$, M, N 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NC} = 2$, 求

$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = \textcircled{11-1} \textcircled{11-2}$ 。



12. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， D, E, F 分別在邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 上，若 $\overline{AD} = 3\overline{DB}$, $3\overline{AE} = 4\overline{CE}$, 且 A 、

P 、 F 三點共線。設 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC} = t\vec{AF}$, 則 $x + y + t = \frac{\textcircled{12-1} \textcircled{12-2}}{\textcircled{12-3}}$ 。



13. 已知直線 $L: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, 點 $P(5, 1)$ 為線外一點, 且點 P 到 L 最短距離之點為 Q , 則 Q 點坐標為 $(\textcircled{13-1}, \textcircled{13-2})$ 。

14. 若方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 恰有一組解為 $x = -\frac{5}{2}$, $y = 3$,

試求方程組 $\begin{cases} 2a_1x + 3b_1y + 4c_1 = 0 \\ 2a_2x + 3b_2y + 4c_2 = 0 \end{cases}$ 的解 $(x, y) = (\textcircled{14-1}, \textcircled{14-2} \textcircled{14-3})$ 。

15. 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為平面上兩非零向量, 若 $3\vec{a} - 4\vec{b}$ 與 $2\vec{a} + \vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積為 k , $12\vec{a} + t\vec{b}$ 、 $3\vec{a} + 4\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積為 $6k$, 且 $t > 0$, 求 $t = \textcircled{15-1} \textcircled{15-2}$ 。

16. 已知 k 為實數, 方程組 $\begin{cases} (k+1)x - 3y = 2k - 2 \\ 2x + (4-k)y = 2 - 5k \end{cases}$ 有無限多組解, 對於所有可能的解 (x, y) , 求 $3x^2 + 9y^2$ 的最小值為 $\textcircled{16-1} \textcircled{16-2}$ 。

參考答案

1. 5

2. 345 3. 25 4. 24 5. 1345 6. 245 7. 23

8. (1, 2)

9. (1) 8 ; (2) (2, 7) ; (3) $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$; (4) $-\frac{16}{3}$

10. $(-1, \sqrt{5})$

11. 27

12. $\frac{13}{8}$

13. (1, 3)

14. $(5, -4)$

15. 38

16. 27