

一、 單選題 (每題 5 分, 共占 15 分)

1. 已知隨機變數 $X \sim G(\frac{1}{10})$, 且 μ 為 X 的期望值, σ 為 X 的標準差。請問 $\mu + \sigma$ 的值最接近下列哪一個正整數?

- (1) 16 (2) 17 (3) 18 (4) 19 (5) 20

2. xy 平面上, 點 F 為拋物線 $y = \frac{1}{16}x^2$ 的焦點, 則點 F 到直線 $-3x + 4y - 6 = 0$ 的距離為何?

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

3. xy 平面上, 將二次曲線 $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4 = 0$ 的圖形繞原點逆時針旋轉 45° 所得的圖形為 Γ 。請問 Γ 的圖形為何?

- (1) 圓 (2) 橢圓 (3) 拋物線 (4) 雙曲線 (5) 沒有圖形

二、 多選題 (每題 10 分, 共占 40 分)

4. 平面上, Γ 的圖形是已經給定的雙曲線, P 是 Γ 上的動點, F_1 、 F_2 是 Γ 的焦點。請問在此平面上, 下列哪些敘述是正確的?

- (1) 一定找得到點 P 使得 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} < 0$
 (2) 一定找得到點 P 使得三角形 PF_1F_2 為等腰三角形
 (3) 一定找得到點 P 使得三角形 PF_1F_2 為直角三角形
 (4) 沒有任何一條拋物線能和 Γ 交於三相異點
 (5) 沒有任何一條直線能和 Γ 交於三相異點

5. xy 平面上, 關於二次曲線 $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$ 的敘述, 下列哪些選項是正確的?

- (1) 圖形為雙曲線
 (2) 圖形有一個頂點為 $(0, 4)$
 (3) 圖形上有 18 個點到直線 $x = 7$ 的距離是整數
 (4) 圖形上任一點和兩焦點所決定的三角形之面積有最大值 12
 (5) 圖形上任一點和兩焦點所決定的三角形之三邊長皆為整數者有 10 個

6. xy 平面上，拋物線 Γ 以直線 $3x+4y+11=0$ 為準線，點 $F(3,0)$ 為焦點，請問下列哪些選項的敘述是正確的？

- (1) Γ 的焦距等於點 F 到直線 $3x+4y+11=0$ 的距離
- (2) Γ 的正焦弦長等於 12
- (3) Γ 的對稱軸方程式為 $4x-3y-12=0$
- (4) 過 Γ 之頂點的切線方程式為 $3x+4y+1=0$
- (5) Γ 的頂點坐標 $(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$

7. 某財神廟舉辦「借發財金」活動，辦法是參加者自備並投擲兩枚硬幣，得到一正一反稱為聖筊，否則稱為笑筊。參加者擲第一次若得笑筊，隨即停止，若得聖筊，則繼續投擲兩枚硬幣，直到出現笑筊才停止，令隨機變數 X 為一位活動參加者停止時的投擲次數，可借的發財金數目為 $100 \cdot 2^X$ 元。請問下列哪些選項是正確的？

- (1) 由小明參加此活動借得發財金 6400 元，可知小明擲出 5 個聖筊
- (2) 若兩枚硬幣皆公正，則機率 $P(X > 10) = \frac{1}{1024}$
- (3) 若兩枚硬幣皆公正，則期望值 $E(X) = 2$
- (4) 若兩枚硬幣皆公正，則 $E(100 \cdot 2^X) = 400$
- (5) 承(1)，若以「機率 $P(X > k)$ 小於 0.05」判定「參加者自備的硬幣是公正的」這個敘述非屬實，則須判定小明自備的硬幣是不公正的

三、 填充題（每題 6 分，共占 30 分）

8. 已知 μ 、 σ 依次為二項分布 $B(180, \frac{1}{6})$ 的期望值、標準差，為了判定某個骰子出現 1 點的情形是否公正，將其投擲 180 次，令隨機變數 X 為此試驗中 1 點出現的次數。若將拒絕域訂為 $X < \mu - 2\sigma$ 或 $X > \mu + 2\sigma$ ，則必須將此骰子出現 1 點的情形判定為不公正的 X 值有 _____ 個。

9. 雙曲線 $\left| \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x+4)^2 + (y-5)^2} \right| = 6$ 的共軛軸長為 _____。

10. 正方形 $ABCD$ 的邊長為 4，若 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 恰為橢圓 Γ 的正焦弦，且 Γ 的長軸長為 $2a$ ，短軸長為 $2b$ ，則 $a^2 + b^2$ 之值為_____。

11. xy 平面上，動點 P 在拋物線 $y^2 = 4x$ 上移動，定點 $A(6, 4)$ 位於拋物線的凹口內，若點 F 為此拋物線的焦點，則三角形 PAF 的周長之最小值為_____。

12. xy 平面上，原點為 O ，動點 $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ 位於第一象限且 P 在橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上，作矩形 $PQRS$ 內接於橢圓 Γ ，若 $PQRS$ 的面積最大值為 α ，此時 $\overline{OP}$ 和 x 軸的所夾的銳角為 β 徑，則數對 (α, β) 為_____。

四、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分為題組，各題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

13-15 題為題組

已知 k 為非負實數，二次曲線 $\Gamma: \frac{y^2}{(k^2 + 3)^2} - \frac{x^2}{(k + 3)^2} = 1$ 的正焦弦長以函數 $f(k)$ 表示，試回答下列問題。

13. $f(0)$ 之值為_____。(填充題，3 分)

14. 隨著 k 值由小到大，函數 $f(k)$ 的遞增遞減情形為下列哪個選項？(單選題，3 分)

- (1) 嚴格遞減
- (2) 嚴格遞增
- (3) 先嚴格遞減，再嚴格遞增
- (4) 先嚴格遞增，再嚴格遞減
- (5) 無法判別

15. $f(k)$ 的範圍為何？(非選擇題，9 分)

一、 單選題 (每題 5 分，共占 15 分)

1.	2.	3.
(4)	(2)	(5)

二、 多選題 (每題 10 分，共占 40 分)

4.	5.	6.	7.
(1)(2)(3)(5)	(2)(4)(5)	(3)(4)	(1)(2)(3)(5)

三、 填充題 (每題 6 分，共占 30 分)

8.	9.	10.	11.	12.
160	8	$8+4\sqrt{5}$	$7+\sqrt{41}$	$(4\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$ 各 3 分

四、 混合題或非選擇題 (共占 15 分)

13. <u>6</u> (填充題，3 分)	
14. <u>4</u> (單選題，3 分)	
15. (非選擇題，9 分，須寫出計算過程或理由) $f(k)=\frac{2(k+3)^2}{k^2+3}=\frac{2k^2+12k+18}{k^2+3}=2+\frac{12k+12}{k^2+3} \quad (2 \text{ 分})$ $f'(k)=\frac{-12(k+3)(k-1)}{(k^2+3)^2} \quad (2 \text{ 分})$ 一階檢定求出最大值 8 (2 分) 求出 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k)=2$ (2 分) 得所求為 (2,8] (1 分)	