

高雄市鳳山高中 113 下高二期末考

一、多重選擇題（占 16 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 8 分。(8-5-2-0)

1. 設 A, B, C 均為二階方陣， O 為二階零矩陣， I 為二階單位方陣，則下列敘述哪些是正確的？

- (1) 若 $AB = O$ ，則 $BA = O$
- (2) 若 $AB = B$ ，則 $A = I$
- (3) 若 $A^2 = I$ ，則 $A = I$ 或 $A = -I$
- (4) $(AB)C = A(BC)$
- (5) $A^2 - 4B^2 = (A + 2B)(A - 2B)$

2. 設 A, B 均為二階方陣， $\det(A)$ 表示方陣 A 所決定之行列式值，則下列敘述哪些是正確的？

- (1) 若 $\det(4A) = 24$ ，則 $\det(A) = 6$
- (2) 若 A, B 均為旋轉矩陣，則 AB 亦為旋轉矩陣
- (3) 若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $a + c = 1, b + d = 1$ ，則 A 為轉移矩陣
- (4) 若 A 為轉移矩陣，則 A 的反方陣存在
- (5) 若 A, B 均為轉移矩陣，則 AB 亦為轉移矩陣

二、填充題（占 84 分）

說明：第 3 題至第 14 題。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得分	8	16	24	32	38	44	50	56	60	64	68	72	76	80	84

3. 設方程組 $\begin{cases} x + 3y + 5z = -7 \\ 3x - 5y + 4z = 6 \\ 7x - 11z = -24 \end{cases}$ 所對應之增廣矩陣為 $A = [a_{ij}]$ ，

則 $a_{14} + a_{23} + a_{32} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$

4. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，則滿足 $3A - \frac{1}{2}X = 2B$ 之矩陣 $X = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

5. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, AB 的所有元中, 最大值為 M , 最小值為 m , 則 $M - m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 設矩陣 $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 之反方陣為 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 則數對 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 考慮下列 6 個變換矩陣：

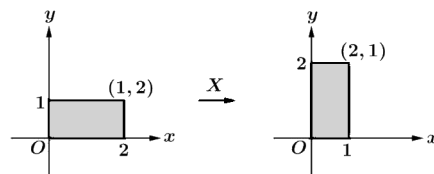
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \text{試求：}$$

- (1) 此 6 個變換矩陣中, 共有 個旋轉矩陣
 (2) 此 6 個變換矩陣中, 共有 個會使的三角形經過該變換後面積依然保持不變
 (3) 下列 6 個敘述中, 正確的共有 個

- I. 直線經 A 之變換後仍為直線
 II. 平行四邊形經 B 之變換後仍為平行四邊形
 III. 拋物線經 C 之變換後仍為拋物線
 IV. 正方形經 D 之變換後周長不會改變
 V. 銳角三角形經 E 之變換後為鈍角三角形
 VI. 任一點經 F 變換二次後為本身

(4) 如圖, 變換矩陣 X 為 。
 (填入代號 $A \sim F$)



8. 設矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & a & 3 & 10 \\ 2 & -1 & -4 & b \\ c & 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ 經列運算後變為 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 12 & 7 & -17 \end{bmatrix}$,

則數對 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 某電子工廠有甲，乙二條生產線，合計共有 1800 位員工，公司訂有輪調規定：「甲生產線每年保留 $\frac{1}{3}$ 的員工， $\frac{2}{3}$ 的員工輪調到乙生產線；乙生產線每年保留 $\frac{3}{5}$ 的員工， $\frac{2}{5}$ 的員工輪調到甲生產線」。每年皆依此模式作輪調，且每條生產線的員工總數維持不變，則甲生產線的員工有【 】位

10. 空間中，四向量 $\vec{a} = (1, 2, -3)$ ， $\vec{b} = (-1, 0, k)$ ， $\vec{c} = (-2, -1, 15)$ ， $\vec{d} = (3, 4, 7)$ ，若不存在實數 x, y, z ，使得 $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ，則 $k =$ 【 】。

11. 設直線 $2x - y = 2$ 經矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$ 變換後成為直線 $9x + 4y = 22$ ，則數對 $(a, b) =$ 【 】。

12. 設數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$ 的每一項都是不超過 3 的正整數，且 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{30} = 56$ ， $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{30}^2 = 122$ ，則 $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \dots + a_{30}^4 =$ 【 】

13. 設 A 為二階方陣，矩陣 $B = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ ， $AB = \begin{bmatrix} 4 & \\ & 11 \end{bmatrix}$ ， $A^2B = \begin{bmatrix} -10 & \\ & -23 \end{bmatrix}$ ，則 $A =$ 【 】。

14. 設 A 為二階方陣，且 $A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ， $A^9 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a + b + c + d =$ 【 】。

参考答案

1. 4 2. 25

3. -3

4. $\begin{bmatrix} 2 & -20 & 4 \\ 32 & -18 & 10 \end{bmatrix}$

5. 36

6. $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}\right)$

7. (1) 1 ; (2) 4 ; (3) 4 ; (4) C

8. (-2, 4, 3)

9. 675

10. 9

11. (-3, 1)

12. 770

13. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

14. 1536