

113 學年度第二學期第三次定期考高二數 A 試題

命題範圍：矩陣

一、是非題(占 40 分)

第 1 題至第 10 題，正確請在 $\square$ 劃記，錯誤請在 $\square$ 劃記。各題答對者，得 4 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 113 學年度的建中人大多生肖為豬、鼠、牛。設豬、鼠、牛為 3 個二階方

陣，滿足豬鼠 = 牛，又已知豬⁻¹存在，則鼠 = 牛豬⁻¹。

2. 已知二階方陣 A 、 B 均為轉移矩陣，則 $\frac{1}{3}(A^3 + AB + B^2)$ 也是轉移矩陣。

3. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$ 為鏡射矩陣，則 A 的乘法反方陣 $A^{-1} = A$ ，且 $A^5 = A$ 。

4. 若二階方陣 A ，其行列式值 $\det(A) = k \neq 0$ ，則 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{k^2}$ 。

5. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} k & 4 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$ ，其中 k 為實數。

若 A 、 B 滿足下式： $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ，則 $k = 6$ 。

6. 若方陣 A 、 B ，滿足 $A^{-1}B^2A = I$ (I 為單位方陣)，則 $B = I$ 。

7. 若方陣 A ，滿足 $A^2 - A = 0$ 的方程式，則 $(2I - 4A)^{-1} = \frac{I - 2A}{2}$ 。

8. 若 $A+B$ 為二階可逆矩陣，且 $\begin{cases} BX - Y = 2A \\ AX + Y = 2B \end{cases}$ ，則必可解得 $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。

9. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 16 & 200 \\ 0 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

10. 設 a, b 為實數，若方程組 $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + ay + 2z = 4 \\ 3x + 6y + bz = 11 \end{cases}$ 恰有一組解，

則 $a \neq 4$ ， $b \neq 3$ 。

二、多重選擇題(占 20 分)

第 11 題至第 15 題，每題有 5 個選項，請將你的答案劃在答案卡上，各題全對者，得 4 分；答錯 1 選項者，得 2 分；答錯 2 選項者，得 1 分；答錯 3、4、5 選項，與全未作答者，該題以零分計算。

11. $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ，滿足 $a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ 3, & i > j \\ 4, & i < j \end{cases}$ ，則 A 之所有元素和為

(1)19 (2)27 (3)25 (4)23 (5)21

12. 設座標平面上三點 $A(-1, 4)$ 、 $B(6, -3)$ 、 $C(8, 1)$ ，則下列哪一點會在 $\triangle ABC$ 之外接圓上？

(1)(1, 2) (2)(-2, 5) (3)(-1, -1) (4)(3, -4) (5)(6, 5)

13. 2028 年總統大選時，台灣某政黨候選人依其長期追蹤全國國民的經濟狀況，提出其經濟改革方案。依其訂定的標準，將國民分為「高收入」和「低收入」兩類。統計發現，高收入的人口會一直都是低收入人口的兩倍，且在其改革方案裏，原為高收入的人口中，每年有四成會轉變為低收入者。請問：在低收入的人口中，每年又會有幾成的人會轉變為高收入者？請選出正確的選項。

(1)5 成 (2)6 成 (3)7 成 (4)8 成 (5)9 成

14. A 和 B 是兩個二階方陣，方陣中每一位置的元素都是實數。就二階方陣所對應的平面變換來說， A 在平面上的作用是對

直線 $X: y + \sqrt{3}x = 0$ 的鏡射，且知 $AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

請選出下列正確的選項。(說明： A 將 P 點對應到 Q 點，則 X 為線段 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線)

(1) $AB = BA$ (2) $A = B$ (3) $A + B = O$ (4) $-A$ 是 B 的 (乘法) 反方陣
(5) B 所對應的平面變換是旋轉

15. 為了解析與收發宇宙裏的訊號，美國的馬斯克進行「線性變換」的研究。在坐標平面上有一矩形，其頂點分別為 $A(6, -4)$ 、 $B(6, 4)$ 、 $C(-6, 4)$ 、 $D(-6, -4)$ 。設二階方陣 M 為在坐標平面上所定義出來的一種線性變換，恰可將 A 映射到 B ，又可將 B 映射到 C 。請選出正確的選項。

(1) M 定義的線性變換是鏡射變換 (2) $M \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

(3) M 定義的線性變換可將 C 映射到 D ，且將 D 映射到 A

(4) M 的行列式值為 -1 (5) $M^3 = -M$

三、選填題(占 40 分)

第 A 至 J 題，將答案劃記在答案卡所標示的列號(16~38)，每題完全答對給 4 分，答錯、未完全答對或未作答，該題以零分計算。

A. 若 $\begin{bmatrix} a+1 & a+b \\ a-b & 3b-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x-4 \\ y+3 & 7 \end{bmatrix}$ ，則 $y = \underline{(16)(17)}$ 。

B. 已知方程組 $\begin{cases} x+y=1 \\ x+3y+2z=\alpha \\ x+5y+4z=\beta \\ x+7y+6z=\beta^2 \end{cases}$ 有解， α, β 為整數，則 $\alpha = \underline{(18)}$ 。

C. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$ ，且 $BA = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ，若矩陣 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix}$ ，則 $b_{11} = \underline{(19)(20)}$ 。

D. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，則：(1) $A^2 - \underline{(21)}A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ；
(2) $A^4 - 4A^3 - 8A^2 + 3A + 5I_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ，則 $a_{22} = \underline{(22)}$ 。

(此題劃卡兩個答案算 4 分)

E. 設 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ，若 $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ，則 $a_{12} = \underline{(23)(24)}$ 。

F. 設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $(I - \frac{1}{2}J)^4 = aI + bJ$ ，則 $a - 2b = \underline{(25)}$ 。

G. 設 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{114} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ，則 $a_{21} = \underline{(26)(27)}$ 。

H. 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, 若 $B = PAP^{-1}$, $B^6 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,
則 $a_{21} = \underline{\textcircled{28} \textcircled{29}}$ 。

I. 平面上二直線 $L_1 : x + 2y = 3$ 與 $L_2 : x - y = 1$ 經線性變換 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 變換成直線 L_1' 與 L_2' , 若 θ 為 L_1' 、 L_2' 之一夾角 , 則 $|\cos \theta| = \frac{7}{\sqrt{\textcircled{30} \textcircled{31}}}$ 。

J. 已將 $y^2 = 4x$ 之圖形旋轉變換 , 將此圖形旋轉 60° 後之新方程式為 $3x^2 + axy + by^2 + cx - d\sqrt{e}y + f = 0$,
則數對 $(d, e) = (\textcircled{32} , \textcircled{33})$ (此題劃卡兩個答案算 4 分)

各位 CK78 的學測戰士們 , 學測作戰的號角已經響起 , 「為樑為棟 , 同支大廈」
就靠你們了 , 開始衝鋒吧 !