

113 學年度第一學期第一次定期考高三數甲試題

注意事項：

1. 本卷出現的函數都滿足定義域與對應域都是實數的部分集合。若在呈現一個函數時，未指明定義域，則定義域就是使函數有意義的最大集合。
2. 是非題與選填題請將答案寫在答案卡，混合題(單選題與計算證明題)請在答案卷上作答。

一、是非題 (每題 2 分，共 42 分)

- 1.() 由於 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ，因此無窮數列

$\langle 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \rangle : 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots$ 不只遞增且有上界，
為收斂數列。

- 2.() 當我們從校園走向圍牆時，若從出發點朝向牆腳 H 走直線，途中必定會經過一個中途點 M_1 。接著，從 M_1 再直線前往 H ，又會有另一個中途點 M_2 ，依此類推，從 M_2 再向 H 走，又會出現新的中途點 M_3 ，這樣不斷重複，會有無限多個中途點要經過，然而每個人的時間有限，因此我們走不到 H ，更不可能爬牆或穿牆。

- 3.() 若 $f(x) = \frac{(x-1)(x+91)}{x-1}$ ， $g(x) = x + 91$ ，則兩函數是同一個函數。

- 4.() $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+91)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 91$

- 5.() $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$

- 6.() 若 $f(x) = 2024x$ ， $g(x) = \frac{x}{2024}$ ，則兩函數互為反函數。

- 7.() 若 $f(x) = |x|$ ， $g(x) = -|x|$ ，則兩函數互為反函數。

- 8.() 若 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，則對於所有實數 x ，
算式 $[1 - 3x] = -[3x - 1]$ 恆成立。

- 9.() 若 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ ，因為 $f(-1) < 0$ ， $f(1) > 0$ ，由勘根定理知，
在區間 $(-1, 1)$ 內必有方程式 $f(x) = 0$ 的實根。

10. () 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ k, & x = 3 \end{cases}$ ($k \in \text{實數}$) 在 $x = 3$ 連續, 則 $k = 6$

11. () 若 $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = x + 8$,
則 $(g \circ f)(1) + (f \circ g)(2) = 131$

12. () $f(x) = \sqrt{36 - 2x - x^2}$ 的值域為 $[0, 6]$

13. () $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^{102}-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^{100}(x+1)^2-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^{100}(x+1)^2-(x+1)^{100}}{x+2}$
 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^{100}[(x+1)^2-1]}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^{100}[(x+2)x]}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x+1)^{100}x$
 $= -2$

題組甲.

已知無窮數列 $\langle a_n \rangle = \langle 1.\overbrace{000\dots 0}^{n\text{個 } 0}1 \rangle : 1.01, 1.001, 1.0001, \dots, 1.\overbrace{000\dots 0}^{n\text{個 } 0}1, \dots$ 。
 而且 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列, 極限為 L 。
 請判斷第 14~19 題的敘述是否正確。

14. () L 可以用符號 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1.\overbrace{000\dots 0}^{n\text{個 } 0}1$ 來表示。

15. () $L > 1$

16. () L 是集合 $\left\{ 1.\overbrace{000\dots 0}^{n\text{個 } 0}1 \mid n \in \text{正整數} \right\}$ 中的一個元素。

17. () $L > \lim_{n \rightarrow \infty} 0.\overbrace{999\dots 9}^{n\text{個 } 9}$

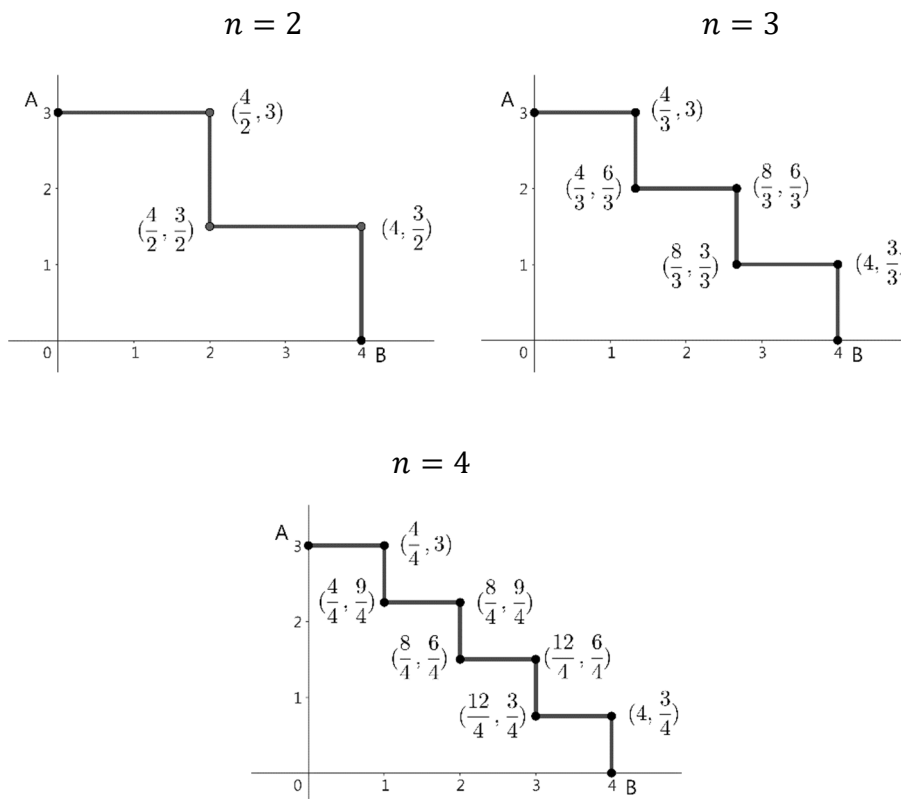
18. () $L > 0.\bar{9} \times 0.\bar{9}$

19. () $L = 1.1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n 0.09 \times 10^{-k}$

題組乙.

已知 $A(0,3)$, $B(4,0)$ 為坐標平面上兩點，現在用 n 段等長的水平線段與 n 段等長的鉛直線段連接這兩點，如下圖所示：

(由左至右分別展示了 $n = 2, 3, 4$ 的情形)



設 S_k 代表當 $n = k$ 時，這些連接 A 和 B 兩點的 k 段水平線與 k 段鉛直線的長度總和。

例如 S_2 代表 2 段水平線與 2 段鉛直線的長度總和 $\frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ 。請判斷第 20 與 21 題的敘述是否正確。

20. () $S_3 = S_4 = 7$

21. () $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 5$

二、選填題(3 格，每格 6 分，共 18 分)

A. 若數列 $\langle \frac{3n^3}{n^3+9} \rangle$ 的極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{n^3+9} = L$,

則此數列從第 ②②②③ 項開始，其值與 L 的差 $\left| \frac{3n^3}{n^3+9} - L \right|$ 會小於 $\frac{1}{1000}$ 。

B. 假設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

設 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ，且已知 $\langle b_n \rangle$ 為收斂數列，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \underline{\text{②④}}$ 。

C. 設 $(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ，其中 a_n 與 b_n 都是有理數，

且已知極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 存在，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \underline{\sqrt{\text{②⑤}}}$ 。

三、混合題 (每題 5 分，共 40 分，請在答案卷上作答)

建仔希望利用極限的概念來探討某物體的溫度($^{\circ}\text{C}$)隨時間(分鐘)的變化過程，假設物體在初始時刻(時間 0)的溫度為 128°C ，並且用函數 $f(x)$ 來表示物體在時間 x 的溫度，例如 $f(0) = 128$ 。

根據牛頓冷卻定律，物體的瞬時溫度變化速率與室溫與當時的溫度之間的溫差成正比。所謂的「瞬時溫度變化速率」指的是在一段趨近於零的時間內，溫度變化的量除以這段時間的長度。已知室溫恆定為 20°C ，且物體在任意時間 k 的溫度瞬時變化速率正好等於室溫與當時溫度的溫差，即

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = 20 - f(k), \quad k \geq 0$$

例如，物體在時間 0 的瞬時溫度變化速率為 $20 - f(0) = 20 - 128 = -108$ $^{\circ}\text{C}/\text{分鐘}$ 。

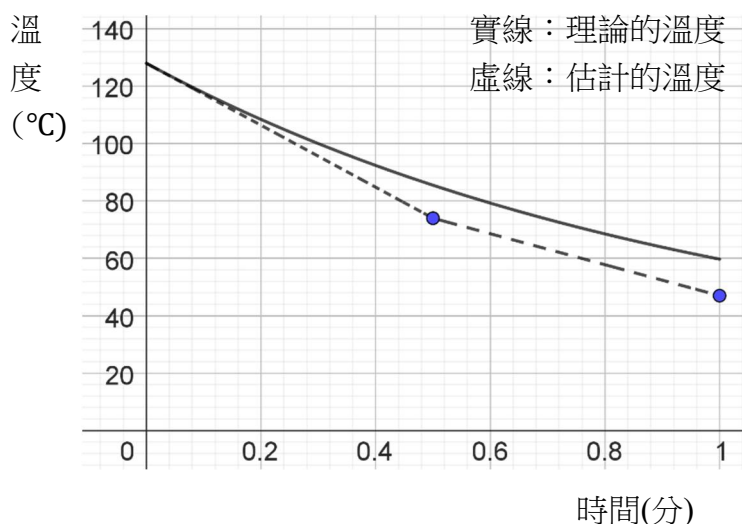
由於溫度的瞬時變化速率隨時間不斷變化，難以直接算出 $f(1)$ 的值。為此，建仔計劃先進行溫度的估計，包括低估與高估，並最終利用極限的概念和夾擠定理來推導出 $f(1)$ 的值。

特別說明：若某值 α 被稱為 a 的低估值，則表示 $\alpha \leq a$ 。例如，3 是圓周率 $\pi = 3.14 \dots$ 的一個低估值。

請回答下列問題：

1. 若在對 $f(1)$ 進行估計時，假設 1 分鐘內的溫度變化速率保持恆定，且等於時間 0 的瞬時變化速率 $-108\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{分鐘}$ 。
請問，根據這樣的計算， $f(1)$ 的低估值是多少？(單選題)
(1) 90 (2) 86 (3) 74 (4) 60 (5) 20
2. 假設將時間從 0 到 1 分鐘均分為兩個階段：第一階段是 0 到 0.5 分鐘，第二階段是 0.5 分鐘到 1 分鐘。第一階段的溫度變化速率恆為時間 0 的瞬時變化速率，第二階段的溫度變化速率則根據 0.5 分鐘時的估計溫度推算。計算過程如下：

時間	溫度(估計)	溫度瞬時變化速率(估計)
0	128	-108
$\frac{1}{2}$	$128 + \frac{1}{2} \times (-108) = 74$	-54
1	$74 + \frac{1}{2} \times (-54) = 47$	-27

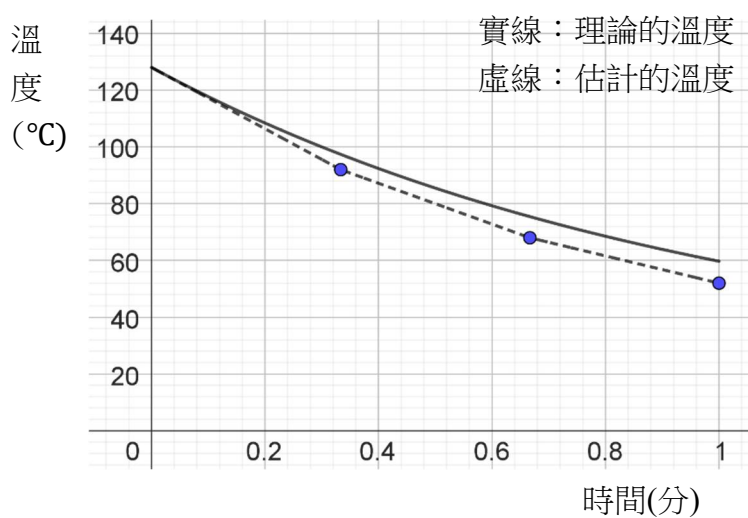


請問，根據這樣的計算， $f(1)$ 的低估值是多少？(單選題)

- (1) 108 (2) 74 (3) 54 (4) 47 (5) 27

3. 假設將時間從 0 到 1 分鐘分均為三個階段，每個階段的時間長度為 $\frac{1}{3}$ 分鐘，請仿照前一題的估算方式，將下表完成：(填充題)

時間	溫度(估計)	溫度瞬時變化速率(估計)
0	128	-108
$\frac{1}{3}$	$128 + \frac{1}{3} \times (-108) = 92$	
$\frac{2}{3}$		
1		



4. 假設將時間從 0 到 1 分鐘均分為 n 個階段，每個階段的時間長度為 $\frac{1}{n}$ 分鐘，並仿照前一題的方式進行計算。

令 $t_{n,i}$ 表示在時間 $\frac{i}{n}$ 時，溫度的低估值，並定義 $d_{n,i} = 20 - t_{n,i}$ ，

$i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ 。

時間	溫度(低估)	溫度瞬時變化速率(估計)
0	$t_{n,0} = 128$	$d_{n,0} = -108$
$\frac{1}{n}$	$t_{n,1} = t_{n,0} + \frac{1}{n} \times d_{n,0}$	$d_{n,1} = 20 - t_{n,1}$
$\frac{2}{n}$	$t_{n,2} = t_{n,1} + \frac{1}{n} \times d_{n,1}$	$d_{n,2} = 20 - t_{n,2}$
...	...	...
$\frac{n-1}{n}$	$t_{n,n-1} = t_{n,n-2} + \frac{1}{n} \times d_{n,n-2}$	$d_{n,n-1} = 20 - t_{n,n-1}$
1	$t_{n,n} = t_{n,n-1} + \frac{1}{n} \times d_{n,n-1}$	$d_{n,n} = 20 - t_{n,n}$

請證明： $t_{n,n} = 108\left(\frac{n-1}{n}\right)^n + 20$

5. 已知自然常數 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ，請證明： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ 。

提示： $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}$

6. 將時間均分為 1、2、3、...、 n 個階段所計算的 $f(1)$ 的低估值寫成數列，再利用上一題的結果，找出當 n 趨近無限大時，該無窮數列的極限值。

7. 假設同樣將時間從 0 到 1 分鐘均分為 n 個階段，每個階段的時間長度為 $\frac{1}{n}$ 分鐘，令 $T_{n,i}$ 表示在時間 $\frac{i}{n}$ 時，溫度的高估值， $t_{n,i}$ 與 $d_{n,i}$ 的定義與第 4 題相同，並使用下表中的計算方式計算 $T_{n,i}$ ， $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ 。

時間	溫度(高估)	溫度瞬時變化速率(估計)
0	$T_{n,0} = 128$	$d_{n,1} = 20 - t_{n,1}$
$\frac{1}{n}$	$T_{n,1} = T_{n,0} + \frac{1}{n} \times d_{n,1}$	$d_{n,2} = 20 - t_{n,2}$
$\frac{2}{n}$	$T_{n,2} = T_{n,1} + \frac{1}{n} \times d_{n,2}$	$d_{n,3} = 20 - t_{n,3}$
...	...	...
$\frac{n-1}{n}$	$T_{n,n-1} = T_{n,n-2} + \frac{1}{n} \times d_{n,n-1}$	$d_{n,n} = 20 - t_{n,n}$
1	$T_{n,n} = T_{n,n-1} + \frac{1}{n} \times d_{n,n}$	

請利用第 4 題的結果，證明： $T_{n,n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)t_{n,n} + \frac{128}{n}$

8. 請利用以上結果，推論並算出此物體 1 分鐘後的溫度，即 $f(1)$ 的值。