

市立臺中一中 113 學年度第二學期 期末考 高二數學(A 組) 試題

※未正確畫記班級、姓名、座號扣 10 分

科目代碼：03

一、單選題 (占 12 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或劃記多於 1 個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $A+B=\begin{bmatrix} 3 & 2+a \\ 3+b & 8 \end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix} -1 & 2-a \\ 3-b & 0 \end{bmatrix}$ ，其中 a, b 為實數， $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ，試問 $3a+b$ 之值為何？ (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6 (5) 7

2. 已知矩陣 $A=[a_{ij}]_{3 \times 3}$ ，其中 $a_{ij}=i^2+j$ ，若 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [k]$ ，試問實數 k 之值為何？
(1) 16 (2) 18 (3) 20 (4) 22 (5) 24

二、多選題 (占 40 分)

說明：第 3 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，所有選項均答對者，得 10 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 2 分，答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

3. 有關二階方陣所對應的平面線性變換，試選出正確的選項。

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 為對 x 軸鏡射的變換 (2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 為對直線 $y=x$ 鏡射的變換

(3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 為以原點為中心逆時針旋轉 60° 的變換

(4) ΔABC 經方陣 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 作伸縮變換後，面積保持不變

(5) ΔABC 經方陣 $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 作線性變換後，面積保持不變

4. 設 A, B 皆為二階方陣、 I 為二階單位方陣、 O 為二階零方陣。試選出正確的選項。

- (1) 若 $AB = O$ ，則 $BA = O$ (2) 若 $AB = I$ ，則 $BA = I$
(3) 若 $A^2 = O$ ，則 $I - A$ 有反方陣 (4) 若 $AB = A - B$ ，則 $AB = BA$
(5) 若 $A^2 = A$ 且 $B^2 = B$ 且 $(A + B)^2 = A + B$ ，則 $AB = O$

5. 設 a, b, c 為實數，已知空間中三向量 $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, b, 6)$, $\vec{w} = (1, 2, c)$ ，若欲將向量

$(a, 5, 9)$ 表示成 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 的線性組合，即 $(a, 5, 9) = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ ，其中 x, y, z 為實數。試選出正確的選項。

- (1) 若 $c \neq 3$ ，則此線性方程組必恰有一組解
(2) 若 $b = 4$ 且 $c = 3$ ，則此線性方程組必為無解
(3) 若 $a = 3$ 且 $c = 3$ ，則此線性方程組必為無限多組解
(4) 若此線性方程組恰有一組解，則三向量 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 必不共平面
(5) 若三向量 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 共平面，則此線性方程組必無限多解

6. 設 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，已知對所有正整數 n ，數列 $\langle c_n \rangle$ 、 $\langle d_n \rangle$ 皆滿足

$A^n = c_n A + d_n I$ ，試選出正確的選項。

- (1) $A^2 - 3A - 2I = O$ (2) $A^{-1} = \frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I$ (3) $c_3 = 6$
(4) $c_5 + d_5 = 1$ (5) $c_7 = 3c_6 + d_6$

三、選填題（占 48 分）

說明：1. A 題至 H 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（7-29）。若答案為分數，請化為最簡分數或最簡根式，沒化簡的話，該題以零分計算。
2. A 到 H 每格完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 聯立方程組 $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ 2x+5y+7z=16 \\ x+3y+4z=9 \end{cases}$ 的增廣矩陣經過一系列的列運算後，得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

則 $a+b+c+d$ 之值為 ⑦。

B. 設實係數二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ 。若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a-b+c-d$ 之值為

⑧⑨⑩。

C. 設一個袋子中，有 2 個白球和 1 個紅球，而手中持有一個白球，今自袋中每次任取一球，然後再將手中原有的球放入袋中，取球機會均等，重複此一實驗。試求第三次試驗後，

袋中 3 個白球之機率為 $\frac{\textcircled{11}}{\textcircled{12}\textcircled{13}}$ 。（化為最簡分數）

D. 設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣（即每一個元皆為非負的且每行之和皆為 1）。若 $A^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$

，則 $|a^2 - b^2|$ 之值為 $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}}$ 。（化為最簡分數）

E. 設二階方陣 $P = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ， $A(a, b)$ 、 $B(c, d)$ 是坐標平面上異於原點 $O(0, 0)$ 的相異兩點。

若 $P^2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 且 $\overline{OA} = 2$ ，則 $\triangle OAB$ 的面積為 ⑬⑭ 平方單位。

F. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，且 $B = A + I$ ，若 $B^n = a_n A + I (n \in N)$ ，則 $\log_8(7a_{114} + 1)$ 之值為 ⑱⑲⑺。

G. 設 $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$ 、 $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，若 $(C + 3AB)(C - 4AB)^{-1}A = kA$ ，則

實數 k 之值為 $\frac{\textcircled{21}\textcircled{22}\textcircled{23}}{\textcircled{24}\textcircled{25}}$ 。(化為最簡分數)

H. 已知直線 $L: 2x - 3y = 0$ 。設 A 代表以 L 為鏡射軸的鏡射矩陣(鏡射變換為將平面上的 P 點映射到 P 對 L 的對稱點 P')。定義直線 L 上的「投影變換」為將 P 點投影到 L 上的投

影點 H (H 為 P 對直線 L 的投影點)。設投影變換對應的矩陣為 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則

$a + b + c + d$ 之值為 $\frac{\textcircled{26}\textcircled{27}}{\textcircled{28}\textcircled{29}}$ 。(化為最簡分數)

市立臺中一中 113 學年度第二學期 期末考 高二數學(A 組)

簡答：

一、 單選題：

1. (4) 2. (1)

二、 多選題

3. (3)(4)(5) 4. (2)(3)(4)(5) 5. (2)(4) 6. (2)(4)(5)

三、選填題：

A. 7 B. -18 C. $\frac{7}{27}$ D. $\frac{1}{2}$ E. 48 F. 114 G. $\frac{-17}{18}$ H. $\frac{25}{13}$