

台南市台南一中 113 上高二期末考

第壹部分：選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 設 $\vec{a} = (2, 3)$ ， $\vec{b} = (-1, 2)$ ， $\vec{c} = (3, 8)$ 。若 $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ，則 $x + y$ 之值為下列何者？

- (1) 3
- (2) 4
- (3) 5
- (4) 6
- (5) 7

2. 在坐標平面上，已知向量 $\overrightarrow{PQ} = \left(\log \frac{1}{5}, 10^{-5}\right)$ ，其中點 P 的坐標為 $\left(\log \frac{1}{2}, -2^{-5}\right)$ 。試選出正確的選項。

- (1) 點 Q 在第一象限
- (2) 點 Q 在第二象限
- (3) 點 Q 在第三象限
- (4) 點 Q 在第四象限
- (5) 點 Q 位於坐標軸上

3. 已知 $\vec{a} = (1, -3)$ ， $\vec{b} = (-2, 4)$ ， t 為實數，則 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 的最小值為下列何者？

- (1) 0
- (2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- (3) $\frac{\sqrt{10}}{7}$
- (4) $\frac{5}{7}$
- (5) $\frac{7}{10}$

4. 如圖， $ABCDEF$ 為一正六邊形，那麼下列向量內積中何者最大？

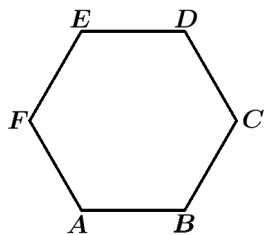
(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

(4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$

(5) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$



5. 已知正三角形 ABC 的邊長為 6， P 在 $\overline{BC}$ 上滿足 $\overline{BP} : \overline{PC} = 1 : 2$ 。令 θ 為 $\overrightarrow{AP}$ 與 $\overrightarrow{BP}$ 的夾角，則 $\cos \theta$ 之值為下列何者？

(1) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

(2) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

(3) $\frac{\sqrt{7}}{14}$

(4) $\frac{-\sqrt{7}}{14}$

(5) $\frac{-\sqrt{7}}{7}$

6. 設 $x^2 + y^2 = 8$ ，且 x 、 y 為實數，則 $x + 2y$ 的最大值為下列何者？

(1) 40

(2) 16

(3) $2\sqrt{10}$

(4) 6

(5) $4\sqrt{2}$

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 11 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

7. 已知 A 、 B 、 C 為平面上相異三點，請選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

(2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$

(4) 若 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ ，則 A 、 B 、 C 三點共線

(5) 若 $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ ，則 A 、 B 、 C 三點共線

8. 設 $A(2, 1)$ 、 $B(1, 2)$ ，則下列何者可做為 $\overrightarrow{AB}$ 之參數式？

(1) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \end{cases} \quad (t \leq 1)$

(2) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \end{cases} \quad (t \leq 0)$

(3) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad (t \leq 1)$

(4) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad (t \leq 0)$

(5) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t \end{cases} \quad (t \leq -1)$

9. 已知 $A(2, 0)$ 、 $B(1, 2)$ ， O 為原點。 P 為平面上一點且 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ， $x, y \in \mathbb{R}$ 。請選出正確的選項。

(1) 若 $x = \frac{113}{2024}$ 、 $y = \frac{1911}{2024}$ ，則 P 點在 $\overline{AB}$ 上

(2) 若 $x + y = 1$ ，則 P 點在 $\overline{AB}$ 上

(3) $\triangle OAB$ 的面積為 2

(4) 若 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ， $-1 \leq y \leq 0$ ，則 P 點所在的區域面積為 1

(5) 若 $0 \leq x \leq a$ ， $0 \leq y \leq b$ ，則 P 點所在的區域面積為 100，則 $a + b$ 的最小值為 10

10. 已知 G 為 $\triangle ABC$ 的重心， O 為平面上任一點。請選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

(2) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(3) $\overrightarrow{GA} \parallel (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

(4) 若 $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$ ，則 $\triangle ABC$ 為正三角形

(5) 若 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC}$ ，則 $\triangle ABC$ 為正三角形

11. 給定二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ，令 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ， $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ，

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ ， $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ， $\vec{c} = (c_1, c_2)$ 。請選出正確的選項。

(1) 若 $\Delta \neq 0$ ，則方程組有解

(2) 若 $\Delta_x = \Delta_y = 0$ ，則方程組有無限多解

(3) 若 Δ_x 、 Δ_y 均不為 0，則方程組無解

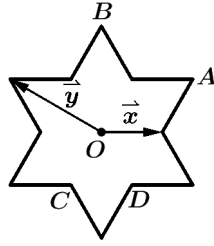
(4) 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 與 $\vec{b}$ 分別張開的平行四邊形面積比為 $2024 : 113$ ，則 $x = \frac{113}{2024}$

(5) 若 $x = \frac{113}{2024}$ ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 與 $\vec{b}$ 分別張開的平行四邊形面積比為 $2024 : 113$

三、填充題（占 25 分）

說明：第 12 題至第 16 題，每題 5 分。

12. 將一圓的六個等分點分成兩組相間的三點，它們所構成的兩個正三角形扣除內部六條線段後可以形成一正六角星，如圖所示的正六角星是以原點 O 為中心，其中 $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ 分別為原點 O 到兩個頂點的向量。若 $\overrightarrow{OC} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ ，則數對 $(\alpha, \beta) =$ 【 】。

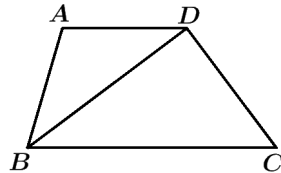


13. $\triangle ABC$ 之三邊長為 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{CA} = 6$ ，則 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ 【 】。

14. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 夾角為 120° ，且 $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 3$ 。若 $\vec{a} - \vec{b}$ 垂直 $\vec{a} + t\vec{b}$ ，則 $t =$ 【 】。

15. 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 都是平面上不為零的向量。若 $2\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 所張成的三角形面積為 6，則 $3\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 所張成的三角形面積為【 】。

16. 如圖，四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{AD} = 5$ ， $\overline{BD} = 8$ 。若 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ ，則 $\tan \angle ADC =$ 【 】。



第貳部分：混合題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

17 — 19 題組

坐標平面上， O 為原點， A 、 B 兩點的坐標分別為 $A(3, 4)$ 、 $B(-5, -2)$ 。根據上述，試回答下列問題。

17. 試問向量 $\overrightarrow{AO}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 的內積為何？(單選題，5 分)

- (1) -23
- (2) -24
- (3) 23
- (4) 24
- (5) 48

18. 已知有一點 Q 使得 $\overrightarrow{OQ}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $(4, 3)$ ， $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{AC}$ ，試求點 C 的坐標。(非選擇題，6 分)

19. 已知點 P 在第二象限，滿足 $\overline{OP} = \sqrt{65}$ ，且 $\triangle OAP$ 面積與 $\triangle OBP$ 面積的比為 $5:3$ 。若 D 為直線 OP 與 $\overline{AB}$ 的交點，試求實數 a 、 b 使得 $\overrightarrow{OD} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ ，並求點 P 的坐標。(非選擇題，6 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 1 2. 3 3. 2 4. 2 5. 4 6. 3

7. 45 8. 35 9. 135 10. 123 11. 15

12. $(-2, -1)$

13. $\frac{27}{2}$

14. $\frac{7}{12}$

15. 16

16. $-\frac{4}{3}$

第貳部分：混合題

17. 5

18. $\left(\frac{79}{25}, \frac{103}{25}\right)$

19. $a = \frac{3}{8}, b = \frac{5}{8}, P(-8, 1)$