

113學年度第一學期第二次定期考高三數學甲試題

命題範圍：第二章微分

一、單選題 (每題5分，共20分)

1. 設 $f(x)$ 為可微分函數，且滿足 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-h)}{2h} = -1$ ，

求曲線 $y = f(x)$ 在以 $(2, f(2))$ 為切點的切線斜率為

- (A) -1 (B) -2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 1 (E) 2 。

2. 已知函數 $f(x) = (x^2 + 1)(2x^3 - x - 3)$ ，則 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處的切線方程式為

- (A) $y + 4 = 10(x - 1)$ (B) $y - 4 = 10(x - 1)$ (C) $y + 4 = 6(x - 1)$
(D) $y - 4 = 6(x - 1)$ (E) $y - 4 = 6(x + 1)$ 。

3. 設 $a > 1$ ，且函數 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 範圍內的

最大值為 9 ，最小值為 2 ，則 $b - a$ 之值為

- (A) 7 (B) 5 (C) 4 (D) -4 (E) -7 。

4. 已知等比數列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 3$ ， $a_6 = 9$ ，若函數

$f(x) = x(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_6)$ ，求 $f'(0) =$

- (A) 0 (B) 3^3 (C) 3^6 (D) 3^9 (E) 3^{12} 。

二、多重選擇題：(每題8分，共40分)

每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分；答錯1個選項者，得5分；答錯2個選項者，得2分；答錯三個選項以上或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 已知 n 為正整數，多項式函數 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 滿足

$$f'(x)f(x) = 3f'(x) + f(x) + 2x^3 - 4x^2 - 1, \text{ 則下列何者正確?}$$

(A) $n=3$; (B) $a_3=1$; (C) $a_2=0$; (D) $a_1=-1$; (E) $a_0=2$ 。

2. 已知點 $P(1, -5)$ 在曲線 $\Gamma: y = f(x) = x^3 - 4x + k$ 上，以點 P 為切點的切線 L ，下列哪些正確？

(A) $k = -2$

(B) L 的斜率 -1

(C) L 之方程式為 $y = -x - 4$

(D) 在點 P 處的法線方程式為 $y = x - 6$

(E) L 與 Γ 的交點除了點 P ，另外的交點坐標為 $(-2, -2)$ 。

3. 設 α, β 為實數，且 $f(x)$ 是一個大於一次的實係數多項式，則下列哪些選項是正確的？

(A) 若 $f'(\alpha) = 0$ ，則 $f(x)$ 在 $x = \alpha$ 處必有極值

(B) 若 $f'(x) > 0$ ，則 $f(x)$ 為遞增函數

(C) 若 $f(x)$ 在 $x = \alpha$ 處有反曲點，則 $f''(\alpha) = 0$

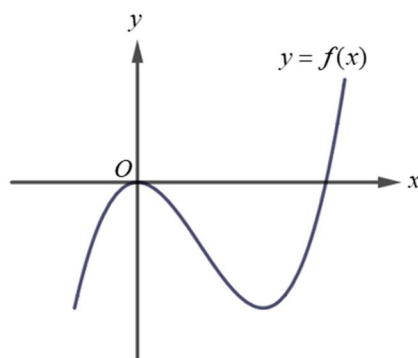
(D) 若 $f(x)$ 在 $x = \alpha$ 處有極大值，當 $x > \alpha$ 且 x 足夠接近 α 時，則 $f'(x) < 0$

(E) 若 $f(x)$ 在 $x = \alpha$ 處有極大值，在 $x = \beta$ 處有極小值，則 $f(\alpha) > f(\beta)$ 。

4. 函數 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + ax^2 + bx + c$ 的圖形如

右圖所示，且與 x 軸在原點相切，且有一極小值為 -2 ，則下列何者正確？

- (A) $a = -3$
 (B) $b = 0$
 (C) $c = 0$
 (D) 函數 $f(x)$ 在區間 $(0, 2)$ 內遞減
 (E) 在區間 $(0, 2)$ 內，函數 $f''(x) > 0$ 。



5. 已知實數 a, b, c 滿足 $a < b < c$ ，若函數 $f(x) = x(x-6)^2 - abc$ ，

且 $f(a) = f(b) = f(c) = 0$ 。則下列選項那些是正確的？

- (A) $0 < a < 2$ (B) $b > 6$ (C) $f(0) < 0$ (D) $f(2) > 0$ (E) $f(4) < 0$ 。

三、填充題：30%（共5題，每格6分）

- a, b 為實數，若曲線 $\Gamma: y = f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$ 通過點 $P(2, -7)$ ，且曲線 Γ 在點 P 處的切線與直線 $5x + 2y + 3 = 0$ 平行，求 $a + b$ 之值為_____。
- 已知函數 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(a+6)x + 4$ 圖形為遞增時，
 則實數 a 值的範圍為_____。
- 設三次函數 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - k$ ，若 $f(x) = 0$ 有兩相異正根及一個負根，則 k 值的範圍為_____。
- 已知三次函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 且滿足 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 9$ ，若 $f(2) = -4$ ，
 則 $f(1)$ 之值為_____。

5. 多項式函數 $f(x)$ 滿足 $5f(x) = f(3-2x) + x^2 - 16x + 19$ ，則曲線 $y = f(x)$ 在點 $(1, f(1))$ 處的切線方程式為_____。

四、計算題：（共10分，請列出計算過程，無計算過程者不計分）

如右圖所示，已知 $\triangle ABC$ 為正三角形， O 點不在平面 ABC 上，若 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1$ ，且 $\overline{OH}$ 垂直平面 ABC 於 H 點，令 $\overline{OH} = x$ ，則：

- (1) 試以 x 表示 $\triangle ABC$ 面積。(4%)
(2) 當 x 值為多少時，角錐 $O-ABC$ 的體積 V 有最大值，此最大值為何？(6%)

