

彰化縣彰化女中 113 下高二期末考

第壹部分：選擇（填）題（占 80 分）

一、單選題（占 15 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 5 分。

1. 已知 $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = 3 \end{cases}$ 且 $\begin{cases} au + bv = 7 \\ cu + dv = 5 \end{cases}$ ，則 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & x \\ v & y \end{bmatrix} = ?$

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. 已知點 $P(1, 2, 3)$ 為三相異平面 $E_1: a_1x + b_1y + c_1z = 0$ ， $E_2: a_2x + b_2y + c_2z = 0$ ， $E_3: a_3x + b_3y + c_3z = 0$ 的共同點，且點 $Q(6, 4, 5)$ 為另外三平面 $F_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ ， $F_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ ， $F_3: a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ 的共同點。則下列哪一個選項也是 F_1 ， F_2 ， F_3 三平面的共同點？

(1) $(3, -2, -4)$

(2) $(2, 4, 6)$

(3) $(-5, -2, -2)$

(4) $(12, 8, 10)$

(5) $(0, 0, 0)$

3. 已知 5 個二階矩陣： $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，

$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ， $E = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ ，若坐標平面上的平行四邊形區域經由這 5 個矩陣所對應的線性

變換後，試判斷下列選項何者錯誤？(1) 形狀不變的共有 3 個 (2) 面積不變的共有 4 個 (3) $AD^3 = D^3A$ (4) $C^{11}D^3 = D^6C^5$ (5) $(EDE)^{99} = ED^{99}E$

二、多選題（占 15 分）

說明：第 4 題至第 6 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

4. 設 A, B, P, Q 都是二階方陣，且滿足 $2A + B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ ， $3A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$ ，則下列哪些選項是正確的？(1) $\det(2A) = 4$ (2) $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 25 \end{bmatrix}$ (3) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $B^2 - 6B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) 若 $AP = AQ$ ，則 $P = Q$

5. 設一個袋子中，有 2 個白球和 1 個紅球，而手中持有 1 個白球，今自袋中每次任取 1 球，然後再將手中原有的球放入袋中，取球機會均等，重複此一實驗。(1) 第一次試驗後，手中是 1 個白球之機率大於 $\frac{3}{4}$ (2) 第二次試驗後，手中是 1 個白球之機率大於 $\frac{3}{4}$ (3) 第二次試驗後，手中是 1 個紅球之機率大於 $\frac{1}{4}$ (4) 第三次試驗後，手中是 1 個紅球之機率大於 $\frac{1}{4}$ (5) 經過長期實驗後，袋中是 2 個白球 1 個紅球之機率為 $\frac{1}{4}$

6. 設 c, d 為實數，下列有關線性方程組 $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - y + cz = 9 \\ x - 3y + 4z = d \end{cases}$ 的敘述哪些是正確的？(1) 若 $c = 7$ ，則此

線性方程組有解 (2) 若 $d = 5$ ，則此線性方程組有解 (3) 若此線性方程組無解，則 $d \neq 5$ (4) 若 $c + d \neq 12$ ，則此線性方程組恰有一組解 (5) 若 $c + d = 12$ ，則此線性方程組有無限多組解

三、填充題（占 60 分）

說明：第 7 題至第 18 題，每題 5 分。

7. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣且不可逆，則 $a + d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 在中國《九章算術》的方程章中第一題敘述如下：「有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗；問上、中、下禾實一秉各幾何？」若上禾、中禾、下禾各一秉，合計共【 】斗？

9. 設 M 為二階方陣，若 $M \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ ， $M \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ， $M \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ ， $M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ ，則 $M \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 坐標平面上，三角形之頂點分別為 $A(3, -2)$ 、 $B(3, 2)$ 、 $C(-3, 2)$ 。設二階方陣 M 為坐標平面上定義的線性變換，可將 A 映射到 B 且將 B 映射到 C 。設直線 AC 經 M 變換後的直線方程式為 $y = mx + k$ ，則數對 $(m, k) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 設 A, B 為二階方陣，已知 $AB = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ ， $ABAA = \begin{bmatrix} 14 & -1 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$ ，則二階方陣 $A^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 已知

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & \cdots \\ 2 & 3 & 8 & 15 & \cdots \\ 5 & 6 & 7 & 14 & \cdots \\ 10 & 11 & 12 & 13 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

，其中位於第 m 列第 n 行的第 (m, n) 元為 555，則數對 $(m, n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 已知三次函數 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ 的圖形通過四點 $(1001, -1)$ 、 $(999, 5)$ 、 $(1002, 11)$ 、 $(1000 + \sqrt{2}, s)$ ，則 $s = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

若 $B^5 = xA + yI$ ， $x, y \in \mathbb{Z}$ ，則 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 已知矩陣 $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 代表依序進行三次線性變換，且

①表示往 x 方向推移 y 坐標 5 倍

②表示往 y 方向推移 x 坐標 5 倍

③表示以原點為中心，往 x 方向伸縮 1 倍，往 y 方向伸縮 5 倍

④表示以原點為中心，往 y 方向伸縮 1 倍，往 x 方向伸縮 5 倍

⑤表示對直線 $x + y = 0$ 的鏡射

⑥表示對直線 $x = y$ 的鏡射

則矩陣 M 所代表的線性變換，依序進行的變換步驟為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 設圓 $C: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 2$ 對於直線 $x + 2y = 0$ 的對稱圓方程式為 $(x+G)^2 + (y+H)^2 = K$ ，則 $G + H + K = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 設 $A = \begin{bmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{bmatrix}$ ，求使 $A^n = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 之最小自然數 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

18. 某電子公司有數百名員工，其用餐方式分為自備、外食兩種。經長期調查發現：若當日用餐為自備的員工，則隔天會有 10% 轉為外食；若當日用餐為外食的員工，則隔天會有 20% 轉為自備。假設 x_0, y_0 分別代表該公司今日用餐自備人數與外食人數佔員工總人數的比例，其中 x_0, y_0 皆為正數，且 x_n, y_n 分別代表經過 n 日後用餐自備人數與外食人數佔員工總人數的比例。

若 $\begin{bmatrix} x_{n+3} \\ y_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ ，則 $d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

第貳部分：混合題（占 14 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

19 — 21 題組

密碼學上，將傳遞的訊息化成數字，今按照英文字母與特殊字元依次編碼如下：

字母	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
序號	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
字母	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	@	#	%	&
序號	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

接著，可使用矩陣表示編碼，例如：「SCHOOL」可表為矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 8 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ 。

為了保密，我們使用一個可逆的二階方陣來做加密動作，這裡使用方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 作加密。加密步驟如下：

①先將 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 8 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ 加密為 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 8 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & 15 & 40 & 27 & 27 & 12 \\ 28 & 9 & 24 & 16 & 16 & 7 \end{bmatrix}$

②再依序由第一列開始改寫成密碼：471540272712280924161607

19. 試求 A 的反方陣。（非選擇題，3 分）

20. 「@CHGSH」改寫成密碼是下列哪一個選項？（單選題，4 分）

- (1) 392315094024352147284024
- (2) 230924212824391540354740
- (3) 391540354740230924212824
- (4) 200010738798

21. 小燈塔 用上述方法將一個訊息加密成數字傳送給 小蠟燭，若 小蠟燭 收到的數字是 094210254704052506152802，試求 小燈塔 所傳送的訊息為何？（非選擇題，7 分）

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 2

2. 1

3. 4

4. 145

5. 24

6. 23

7. 1

8. $\frac{65}{4}$

9. $\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

10. $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

11. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

12. (22, 24)

13. $5 - 2\sqrt{2}$

14. (121, -122)

15. ④⑤②

16. 6

17. 3

18. 0.562

第貳部分：混合題

19. $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

20. 3

21. URBEST