

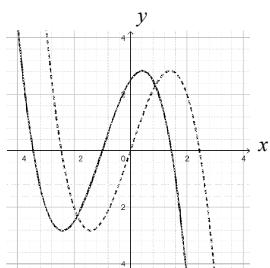
113 學年度第一學期第三次定期考高一數學試題

命題範圍：多項式

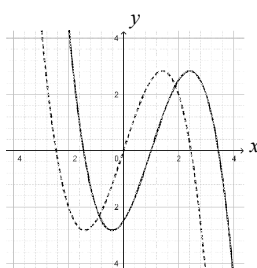
一、單選題：(占 32 分)(每題答對得 8 分)

1. 已知在 x - y 平面上 $y = ax^3 + cx$ (其中 a, c 是實數) 的圖形是下列選項中的虛線，設 $f_1(x) = a(x+1)^3 + c(x+1)$ ，則下列每個選項的實線中，請選出最接近 $y = f_1(x)$ 圖形的選項。

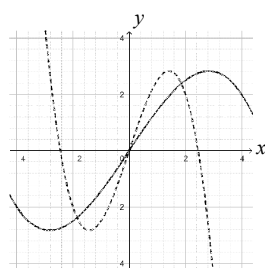
(1)



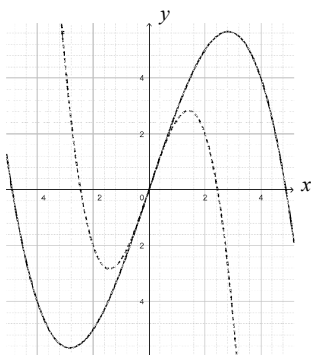
(2)



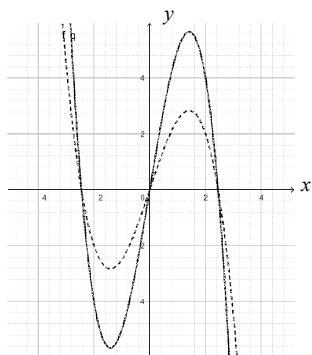
(3)



(4)

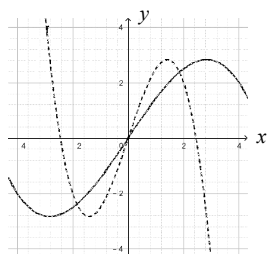


(5)

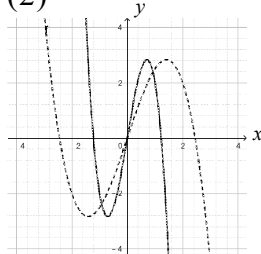


2. 已知在 x - y 平面上 $y = ax^3 + cx$ (其中 a, c 是實數) 的圖形是下列選項中的虛線, 設 $f_3(x) = a(2x)^3 + c(2x)$, 則下列每個選項的實線中, 請選出最接近 $y = f_3(x)$ 圖形的選項。

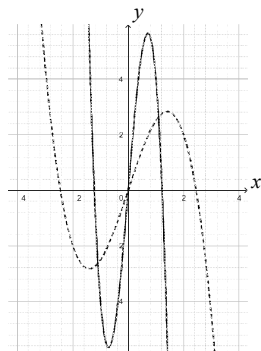
(1)



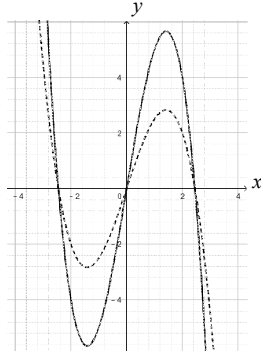
(2)



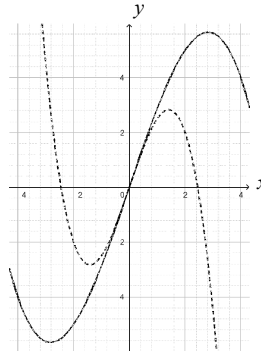
(3)



(4)

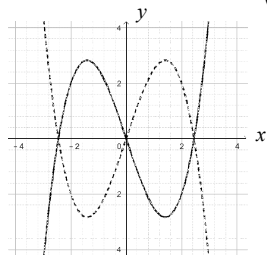


(5)

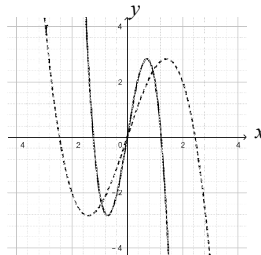


3. 已知在 x - y 平面上 $y = ax^3 + cx$ (其中 a, c 是實數) 的圖形是下列選項中的虛線, 設 $f_2(x) = ax^3 - cx$, 則下列每個選項的實線中, 請選出最接近 $y = f_2(x)$ 圖形的選項。

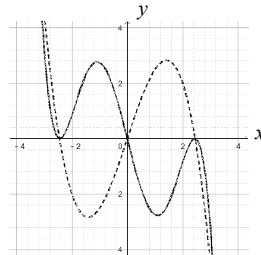
(1)



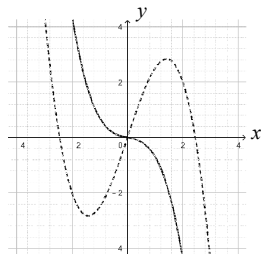
(2)



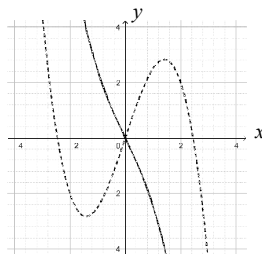
(3)



(4)



(5)



4. 費氏（Fibonacci）數列 $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle = \langle 1, 1, 2, 3, 5, \dots \rangle$ 的首兩項是 1，之後的每一項是其前兩項的和，即 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ （其中 $a_0 = 1, a_1 = 1$ ， n 是自然數）。類似的定義也出現在柴比雪夫

（Chebyshev）多項式序列 $\langle f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots \rangle$ ，

首兩項 $f_0(x) = 1$ 、 $f_1(x) = x$ ，之後的每一個多項式是由其前兩項得

到，定義方法如下： $f_2(x) = 2x \cdot f_1(x) - f_0(x)$ 、 $f_3(x) = 2x \cdot f_2(x) - f_1(x)$

、 $\dots$ ，即 $f_{n+1}(x) = 2x \cdot f_n(x) - f_{n-1}(x)$ （其中 n 是正整數），如：

$$f_2(x) = 2x \cdot (x) - (1) = 2x^2 - 1 \text{、} f_3(x) = 2x \cdot (2x^2 - 1) - (x) = 4x^3 - 3x \text{、}$$

$$f_4(x) = 2x \cdot (4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \text{。由此歸納柴比雪夫多項}$$

式序列 $\langle f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots \rangle = \langle 1, x, 2x^2 - 1,$

$4x^3 - 3x, 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots \rangle$ ，請選出下列正確的選項。

(1) $f_{113}(x)$ 除以 x 的餘式為 1

(2) $f_{2024}(x)$ 除以 x 的餘式為 0

(3) $f_{114}(x)$ 除以 x 的餘式為 -1

(4) $f_{2025}(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 1

(5) $f_{116}(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 -1

二、多重選擇題：(占 24 分)(每題答對得 8 分)

5. 二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (其中 a, b, c 是實數) 滿足

$f(-2) = f(4)$ ，且『當 $-1 \leq x \leq 5$ 時， $f(x)$ 的最小值為 2、最大值為 10』。請選出下列正確的選項。

(1) $y = f(x)$ 圖形的對稱軸是 $x - 2 = 0$

(2) 若 a 的值大於 0，則 $a = 2$ (3) 若 a 的值小於 0，則 $a = -1$

(4) $ab = \frac{-1}{2}$ (5) $f(1 + 2\sqrt{2}) = 6$

6. 已知三次多項式 $f(x)$ 的首項係數為 -1 ，且 $f(-3) = f(8) = -8$ 、 $f(4) = 20$ ，請選出下列正確的選項。

(1) xy 坐標平面上， $y = f(x) + 8$ 的圖形與 x 軸有三個交點

(2) xy 坐標平面上， $y = f(x)$ 圖形對稱中心的 x 坐標為 $\frac{8}{3}$

(3) $f(-1) < f(0)$

(4) 必可找到一個三次多項式 $g_1(x)$ 滿足『 $y = g_1(x)$ 與 $y = f(x)$ 圖形的大域特徵(首項係數)相同、且 $y = g_1(x)$ 與 $y = f(x)$ 圖形的對稱中心坐標相同，但 $g_1(x) \neq f(x)$ 』

(5) 設 $y = f(x)$ 圖形的對稱中心坐標為 (h, k) ，若三次多項式 $g_2(x)$ 滿足『 $y = g_2(x)$ 與 $y = f(x)$ 圖形的大域特徵(首項係數)相同，且 $y = g_2(x)$ 與 $y = f(x)$ 圖形在點 (h, k) 附近的近似直線相同』，則 $g_2(x) = f(x)$ 。

7. 已知多項式函數 $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 1$ ，設 $y = f(x)$ 的圖形在

$x = k$ 附近的近似直線為 $y = L_k(x)$ ，其中 k 是實數，請選出下列正確的選項。

(1) $L_0(x) = 5x - 1$ (2) 對任意實數 x ， $f(x) - L_0(x)$ 的值恆為正數

(3) $L_2(x) = 5x + 5$

(4) xy 平面上除了點 $(2, f(2))$ 之外，所有 $y = f(x)$ 圖形上的點一定在 $y = L_2(x)$ 直線圖形的上方

(5) 若 $f(1.97)$ 用十進位表示時，將此數的小數點後第三位四捨五入至小數點後第二位，則可得近似值 4.85

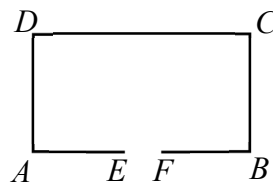
三、選填題：(占 32 分)(每題答對得 8 分)

A. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 1、除以 $x+1$ 的餘式為 -1 ，且 $f(x)$ 除以 x^2+x-1 的商為 $x-2$ 。假設 $f(x)$ 除以 x^2-2 的餘式為 $ax+b$ (其中 a, b 是實數)，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

B. 設 $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 4x + 2$ ，已知 $\sqrt{3} \div 1.732$ ，則 $f(2 - \sqrt{3})$ 的近似值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ (將小數點後第三位四捨五入至小數點後第二位)。

C. 三次多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 54$ (其中 a, b, c 是實數)，已知不等式 $f(x) \geq 0$ 的解為「 $x \leq -3$ 或 $x = 3$ 」，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- D. 如圖所示，一長方形菜圃 $ABCD$ ，在其中一邊 $\overline{AB}$ 正中央留著 2 公尺的出入口 (EF)，已知長方形 $ABCD$ 去除了出入口 (EF) 之外，是用 58 公尺長的竹籬圍成，而且須滿足



足 $\frac{1}{2} \leq \frac{\overline{DC} \text{ 長度}}{\overline{CB} \text{ 長度}} \leq \frac{3}{2}$ 的要求，設長方形 $ABCD$ 面積的最大值為 M

(平方公尺)、最小值為 m (平方公尺)，則 $M + m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

四、混合題：(占 12 分)

A 題答對得 8 分、B 題答對得 4 分

設多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的首項係數均為 1，其中 $f(x)$ 為三次多項式，若已知 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $2x-1$ ，且 $(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $-2x-3$ ，試回答下列 (A)、(B) 兩個問題：

(A) 請選出下列正確的選項。(多重選擇題)

- (1) $g(x)$ 有可能是三次多項式 (2) $(2x-1)^2$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $-2x-3$
 (3) $g(0) = -1$ (4) $g(2) = 4$ (5) 滿足題意條件的多項式 $f(x)$ 是唯一的

(B) 已知多項式 $(f(x))^3$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $ax+b$ (a, b 是實數)，則

$a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。