

本次測驗准用符合數學科規範之計算機：CASIO FX-82SolarII, Canon F-502G, FuhBao FX-180, E-More FX-127。

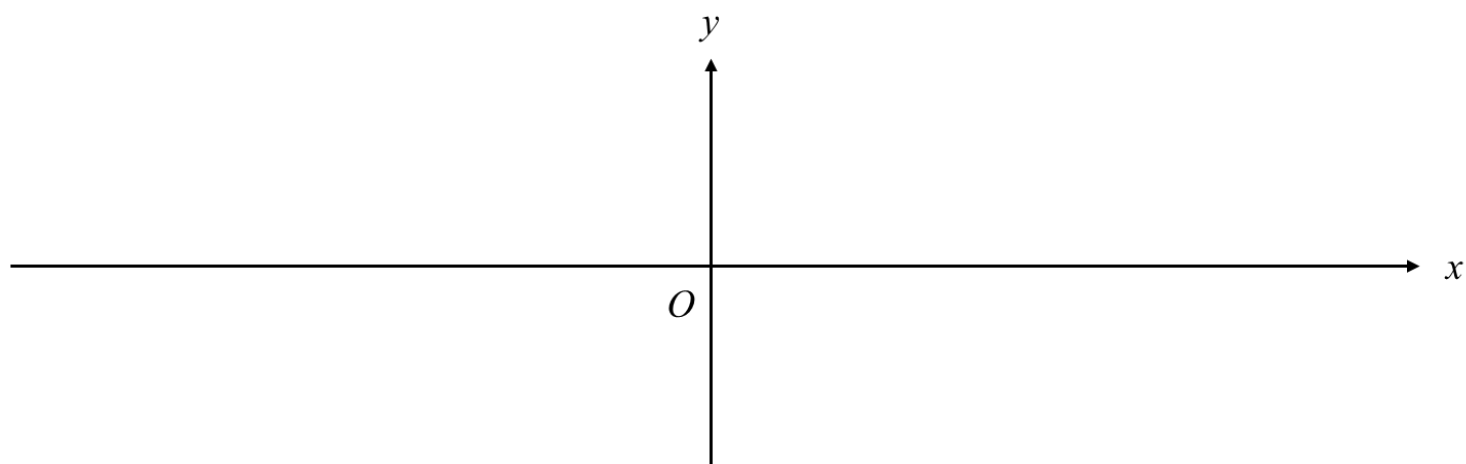
(滿分 112 分，得分超過 100 分以 100 分計算。) 班級：□201 □202 座號：_____ 姓名：_____

一、填充題(每格 1 分，共 20 分。請在各方格內填入正確的值與公式，求近似值者請準確到小數點後第二位。)

A. $\sin \frac{\pi}{6} =$	B. $\sin \frac{\pi}{4} =$	C. $\sin \frac{\pi}{3} =$	D. $\sin \frac{5\pi}{12} =$
E. $\cos \frac{\pi}{6} =$	F. $\cos \frac{\pi}{4} =$	G. $\cos \frac{\pi}{3} =$	H. $\cos \frac{2\pi}{3} =$
I. $\tan \frac{3\pi}{4} =$	J. $\tan \frac{3\pi}{2} =$	K. $\tan(-1.25\pi) =$	L. $\tan 89^\circ \approx$
M. $\sin 1 \approx$	N. $\cos 20 \approx$	O. $\sin 18^\circ =$	P. $\sin^2 2 + \cos^2 2 =$
Q. $\sin(\alpha \pm \beta) =$			
R. $\sin 2\theta =$			
S. $\cos(\alpha \pm \beta) =$			
T. $\cos 2\theta =$			

二、計算題(共 22 分，請留下詳細計算過程，未有過程者即便答案正確亦不給分。)

甲、請在 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 範圍內，繪製作 $y = \sin|x| + |\sin x|$ 的圖形。(繪於下方 xy 座標系中) (8 分)

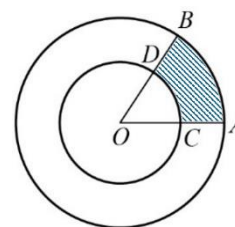


乙、用一條長度為 20 公尺的繩子圍成一個扇形，其面積為 A ，半徑為 r ，中心角為 θ 。 (8 分)
試求 A 的最大值為何？又最大值發生時， $r = ?$ $\theta = ?$ 。

三、單選題(每題 5 分，共 20 分。)

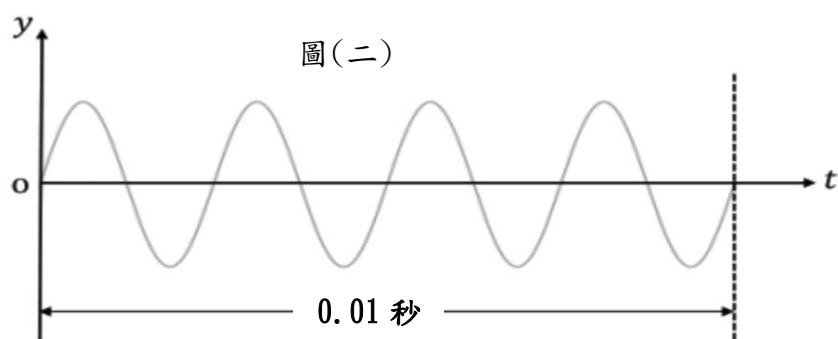
- () 1. 如右圖(一)，兩個同心圓的半徑分別是 3 公分和 5 公分，且 AB 的長度為 5 公分，

求斜線部分的面積為何？ (1) 8 (2) 16 (3) 4π (4) 8π (5) $\frac{20}{3}$ 平方公分



圖(一)

- () 2. 大部分的聲音，由好幾種頻率混合而成，波形複雜。而音叉振動時，只會發出單一頻率，波形最為單純，因此可做為調音的工具。下圖(二)為音叉發出的聲音在儀器上的圖形，其中 y 為震動的位移(公分)， t 則為時間(秒)，假設其波形為正弦函數的圖形 $y = \sin at$ ，試問正弦函數 $y = \sin at$ 的圖形之週期為下列哪一個選項？



- (1) $\frac{1}{100}$ 秒 (2) $\frac{1}{200}$ 秒 (3) $\frac{1}{300}$ 秒 (4) $\frac{1}{400}$ 秒 (5) $\frac{1}{500}$ 秒

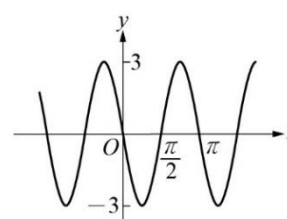


- () 3. 將函數 $y = \sin x$ 的圖形由 y 軸左右往中央壓縮為 $\frac{1}{2}$ 倍，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 個單位，所得新圖形的函數為何？

- (1) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ (2) $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ (3) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ (4) $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$ (5) $y = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$

- () 4. 右圖(三)是下列哪一個函數的圖形？

- (1) $y = \sin x$ (2) $y = 3\sin x$ (3) $y = -3\sin x$ (4) $y = 3\sin 2x$ (5) $y = -3\sin 2x$



圖(三)

四、多選題(每題 10 分，共 20 分。)

- () 5. 試比較 $a = \sin 1$ ， $b = \sin 2$ ， $c = \sin 3$ ， $d = -\sin 4$ ， $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 之大小，下列何者是對的？

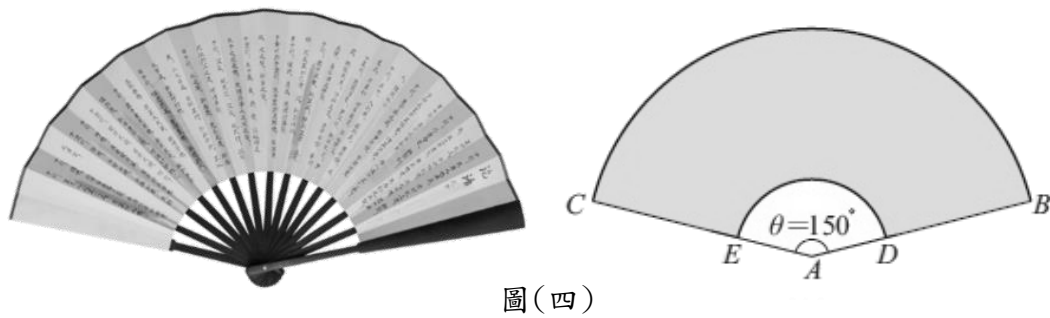
- (1) 最大為 a (2) 最大為 b (3) 最大為 e (4) 最小為 c (5) 最小為 d

- () 6. 考慮函數 $f(x) = 4\sin 3x$ ，試問下列選項何者為真？

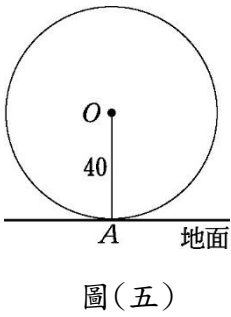
- (1) $-4 \leq f(x) \leq 4$ (2) $f(2) > 0$ (3) $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 時有最大值
(4) $y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x + \frac{\pi}{6} = 0$ (5) $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 時有最小值

五、選填題 (每題 6 分，共 30 分。)

- A. 試問 $\frac{5\pi}{6}$ 弧度為多少度？ 答： ⑦⑧⑨°
- B. 設 $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ ，且 θ 為第三象限角，令 $i = \cos \theta$ 、 $j = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$ 、 $k = \tan(\pi - \theta)$ ，求數對 $(i, j, k) = (\frac{\textcircled{10}\textcircled{11}}{\textcircled{12}}, \frac{\textcircled{13}}{\textcircled{14}}, \frac{\textcircled{15}\textcircled{16}}{\textcircled{17}})$ 。
- C. 方程式 $\pi \sin x = x$ 有 ⑱ 個實數解。
- D. 時鐘在 8 點 15 分時，時針與分針所夾的較小角度是多少度？ 答： $\frac{\textcircled{19}}{\textcircled{20}}\pi$
- E. 古代的人們喜歡在扇子上作圖或寫上名家之言，如圖(四)，扇面上即是東晉書法家書聖王羲之的“蘭亭序”；經由測量此扇子大小規格如下圖(三)。已知 $\overline{AB} = 9.5$ 寸， $\overline{AD} = 3.5$ 寸，扇面的張角 θ ，且 1 寸 ≈ 3.33 公分，求扇面 $(BCED)$ 的面積約為多少平方公分？答： ⑳㉑㉒㉓㉔ 公分。

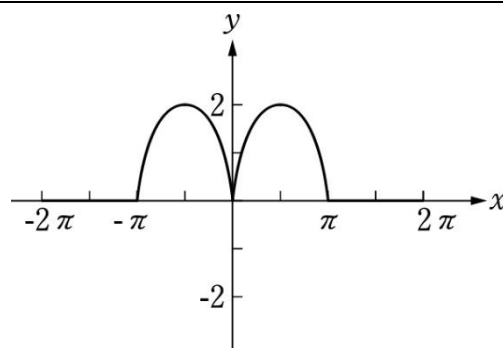


- F. 某遊樂場的摩天輪直徑為 80 公尺， O 為旋轉中心，如圖(五)所示，若已知該摩天輪旋轉一圈需花 20 分鐘(假設該摩天輪是逆時針方向等速旋轉)。那麼，如果阿鴻從地面 A 點處搭上摩天輪，則 12 分鐘後，阿鴻離地面的高度約為 ㉕㉖.㉗㉘ 公尺。(準確到小數點後第 2 位)



A. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	B. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	C. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	D. $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
E. $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	F. $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	G. $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	H. $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
I. $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$	J. $\tan \frac{3\pi}{2} = \text{X}$	K. $\tan(-1.25\pi) = 1$	L. $\tan 89^\circ \approx 57.29$
M. $\sin 1 \approx 0.84$	N. $\cos 20 \approx 0.41$	O. $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	P. $\sin^2 2 + \cos^2 2 = 1$
Q. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$			
R. $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$			
S. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$			
T. $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$			

甲、當 $x \geq 0$ 時， $y = \sin x + |\sin x| = \begin{cases} 2\sin x & \sin x \geq 0 \\ 0 & \sin x < 0 \end{cases}$
 當 $x < 0$ 時， $y = -\sin x + |\sin x| = \begin{cases} 0 & \sin x \geq 0 \\ -2\sin x & \sin x < 0 \end{cases}$
 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ，作圖如右



乙、由題意知， $2r + r\theta = 20$ ，且扇形面積 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ ，

根據算幾不等式可得 $20 = 2r + r\theta \geq 2\sqrt{2r \cdot r\theta} = 4\sqrt{A}$ ，故 $A \leq 25$ ，所以 A 的最大值是 25。

當等號成立時， $2r = r\theta = 10$ ，得 $r = 5$ ， $\theta = 2$ 。

答： A 的最大值為 25、 $r = 5$ ， $\theta = 2$ 。

1. 設 $\angle BOA = \angle DOC = \theta$ $\because AB = 5 \Rightarrow 5 = 5 \times \theta \Rightarrow \theta = 1 \Rightarrow$ 斜線部分面積為 $\frac{1}{2} \times 5^2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 3^2 \times 1 = \frac{1}{2} \times (5^2 - 3^2) = 8$ $\therefore$ 選(1)

2. 由圖形可知總共經過 4 個週期 T ，則 $4T = \frac{1}{100}$ ， $T = \frac{1}{400}$ $\therefore$ 選(4)

3. $y = \sin x \xrightarrow{\text{壓縮}\frac{1}{2}} y = \sin 2x \xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}} y = \sin(2(x + \frac{\pi}{6})) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 故選(3)

4. 由附圖得知函數週期為 π ，振幅為 3，且過 $(\frac{\pi}{4}, -3)$ $\therefore$ 選(5)

5. $a = \sin 1 \approx \sin 57.3^\circ > 0$

$b = \sin 2 \approx \sin 114.6^\circ = \sin 65.4^\circ > \sin 57.3^\circ > 0$

$c = \sin 3 \approx \sin 171.9^\circ = \sin 8.1^\circ > 0$

$d = -\sin 4 \approx -\sin 229.2^\circ = -(-\sin 49.2^\circ) = \sin 49.2^\circ > 0$

$e = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$

$\Rightarrow c < d < a < e < b$ 故選(2)(4)

6. (1) $-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Rightarrow -4 \leq f(x) \leq 4$

(2)(3) $x = \frac{\pi}{6}$ 時， $\sin 3x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ； $x = \frac{\pi}{2}$ 時， $\sin 3x = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

(4) $f(-x - \frac{2\pi}{6}) = 4\sin 3(-x - \frac{2\pi}{6}) = 4\sin(-\pi - 3x) = 4\sin 3x = f(x)$ $\therefore y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x + \frac{\pi}{6} = 0$

(5) $f(2) = 4\sin 6 \approx 4\sin(6 \times 57.3^\circ) = 4\sin 343.8^\circ < 0$ $\therefore$ 選(1)(2)(3)(4)

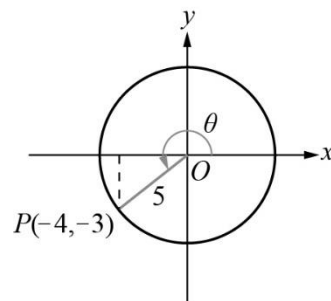
A. 150°

B. $\left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-3}{4}\right)$

因為 $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ ，且 θ 為第三象限角，所以 θ 終邊與圓的交點 $P(-4, -3)$

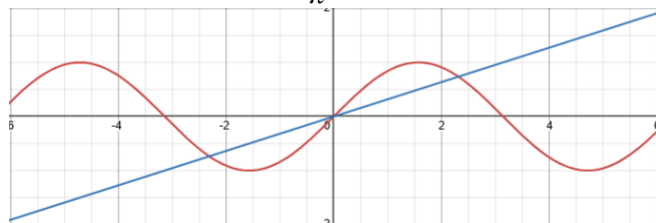
根據定義可以得知 $\cos\theta = \frac{-4}{5}$ ， $\tan\theta = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$$



C. 3

$$\pi \cdot \sin x = x \Rightarrow \sin x = \frac{x}{\pi}$$



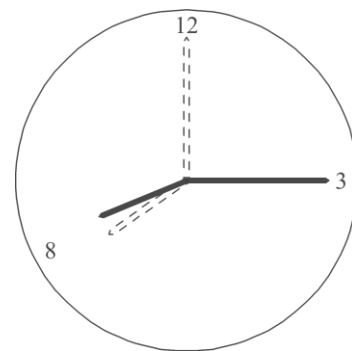
D. $\frac{7\pi}{8}$

鐘面上每小格所對的圓心角是 6° ，即 $\frac{\pi}{30}$ 徑，又分針走 1 小格，時針走 $\frac{1}{12}$ 小格，

而從 8 點到 8 點 15 分，分針走了 15 小格，時針走了 $\frac{15}{12}$ 小格，

於是在 8 點 15 分時，兩針相差 $(40 + \frac{15}{12}) - 15 = \frac{315}{12} = \frac{105}{4}$ (小格) (小於 30 小格)，

半圓有 30 小格，於是時針與分針所夾的較小角度是 $\frac{\pi}{30} \times \frac{105}{4} = \frac{7\pi}{8}$ (徑)。

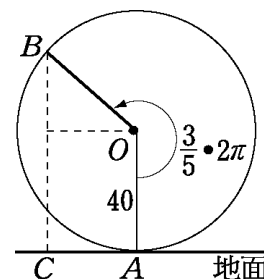


E. 1132

先將 150° 表示成弧度： $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$ 徑，且 $\overline{AB} = 9.5$ 寸 ≈ 31.64 公分； $\overline{AD} = 3.5$ 寸 ≈ 11.66 公分。

則扇面 (BCED) 的面積為：扇形 ABC - 扇形 ADE $\approx \frac{1}{2} \times 31.64 \times 31.64 \times \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2} \times 11.66 \times 11.66 \times \frac{5\pi}{6}$

由計算機可得，約為 1132 (平方公分)。



F. 72.36

依題意作圖如附，所求高度 $= \overline{BC} = \overline{OA} + \overline{OB} \cdot \sin\left(\frac{3}{5} \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \overline{OA} + 40 \sin \frac{7\pi}{10} = 40 + 40 \cos \frac{\pi}{5} = 72.36$