

台南市台南女中 113 下高二第二次期中考

第壹部分：選擇（填）題（占 90 分）

一、多選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

1. 設 a, b, c 為實數，下列有關線性方程組
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + az = b \\ 4x + y + cz = 5 \end{cases}$$
 的敘述哪些是正確的？

- (1) 若此線性方程組有解，則 $a - c - 2 \neq 0$
- (2) 若 $a \neq -2$ 且 $c \neq -4$ ，則此線性方程組必恰有一組解
- (3) 若 $a = -2$ 且 $c = -4$ ，則此線性方程組有可能為無限多組解
- (4) 若此線性方程組有解，則 $b = 1$
- (5) 若 $b = 1$ ，則此線性方程組必有解

2. 空間中有三向量 $\vec{a} = (0, 1, -1)$ ， $\vec{b} = (-1, 1, 0)$ 與 $\vec{c} = (k - 1, k^2, -1)$ ，若空間中的任意向量都可以表示為 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 的線性組合，試選出可能的 k 值。

- (1) -3
- (2) -2
- (3) -1
- (4) 0
- (5) 1

3. 設 A 、 B 均為 2 階方陣，下列敘述哪些是正確的？(O ：二階零矩陣； I ：二階單位方陣)

- (1) 若 $A \neq O$ 且 $AB = AC$ ，則 $B = C$
- (2) 若 $AB = BA$ ，則 $(AB)^2 = A^2B^2$
- (3) 若 $A^2 - I^2 = O$ ，則 $A + I = O$ 或 $A - I = O$
- (4) 若 A 、 B 的反方陣均存在，則 $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- (5) 設 x 為任意實數，二階方陣 $\begin{bmatrix} x^2 - 1 & x - 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的反方陣必存在

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{使得} A} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ 且 } A \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. 關於矩陣對運算的下列結論哪些是正確的？

5. 下列各選項所代表之幾何圖形，哪些與直線 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 且 $A \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 平行？

_____ $= \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{6}$ 平行？

(1) $3x + 2y + 6z = 12$

(2) $2x + 3y - 2z = 12$

(3) $3x = 2y = 6z$

(4) $\begin{cases} 4x - 3y - z = 8 \\ 2x - 6y + z = 5 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

二、填充題（占 60 分）

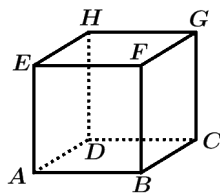
說明：第 6 題至第 15 題，每格 6 分。

6. 包含兩平行直線 $L_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ 與 $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-1}$ 的平面方程式為 (6-1)x - (6-2)y + z = (6-3)。

7. 坐標空間中有直線 $L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{3}$ 與 $L_2: \frac{x-6}{2} = \frac{y}{a} = \frac{z+1}{1}$ ，其中 a 為實數。若直線 L_1 與 L_2 交於一點，求 $a = \frac{\textcircled{7-1}\textcircled{7-2}}{\textcircled{7-3}}$ 。

8. 坐標空間中有兩不相交直線 $L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$ 、 $L_2: \frac{x}{-2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-6}{2}$ ，另一直線 L_3 與 L_1 、 L_2 皆相交且垂直。若 $A(p, -6, q)$ 為 L_3 上一點，求數對 $(p, q) = (\textcircled{8-1}, \textcircled{8-2})$ 。

9. 坐標空間中有一個長方體 $ABCD-EFGH$ ，其底面 $ABCD$ 為正方形，如圖所示 (此為示意圖)。若已知平面 $ABCD$ 的方程式為 $x+ay-z+b=0$ ，直線 $\overrightarrow{AC} : \frac{x-1}{3} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-6}{2}$ ，點 $H(1,0,2)$ ，求



(1) 數對 $(a, b) = (\textcircled{9-1} \textcircled{9-2}, \textcircled{9-3} \textcircled{9-4})$ 。

(2) 正方形 $ABCD$ 的邊長為 $\sqrt{\frac{\textcircled{9-5} \textcircled{9-6}}{\textcircled{9-7}}}$ 。

10. 坐標空間中，有一鏡面 $E: x+2y+3z=-7$ ，一質點自點 $P(-3, -1, 4)$ 沿著方向 $\vec{a} = (6, -1, -6)$ 等速直線前進，經過 2 秒後剛好到達鏡面 E 上的 Q 點，反射之後依同樣的速率等速直線前進，再經過 3 秒此質點會剛好通過 R 點，求

(1) Q 點的坐標為 $(\textcircled{10-1}, \textcircled{10-2} \textcircled{10-3}, \textcircled{10-4} \textcircled{10-5})$ 。

(2) R 點的 x 坐標為 $\textcircled{10-6} \textcircled{10-7}$ 。

11. 已知二階方陣 A 滿足 $A^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \langle ? \rangle \end{bmatrix}$ 且 $A^{-1} \begin{bmatrix} \langle ? \rangle \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \langle ? \rangle \end{bmatrix}$ ，若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，

11-111-2。

12. 設 $a_1, a_2, \dots, a_8$ 為等差數列且 k 為實數。若方程組
$$\begin{cases} a_1x + 2a_2y - a_3z = k + 4 \\ a_3x + 2a_4y - a_5z = -k - 12 \\ a_6x + 2a_7y - a_8z = k + 9 \end{cases}$$

有解，則 $k = \textcircled{12-1} \textcircled{12-2}$ 。

13. 設 $A = \begin{bmatrix} y & 0 & 3 \\ x & -1 & 2 \\ z & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ y & 4 \\ z & 5 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 6-y & 15 \\ 6-7y & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ，其中 x, y, z 為實數。已知 $C = AB$ ，求

$x^2 + y^2 + z$ 的最小值為 $\frac{\textcircled{13-1}}{\textcircled{13-2}}$ 。

14. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ -4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & -4 & -6 \\ 3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$,

求 $AB + AC$ 的第 $(3, 2)$ 元為 14-1 14-2。

15. 已知 a, b 為實數，且方程組 $\begin{cases} ax + 2y - z = 1 \\ x + ay + bz = 5 \\ 3x + 4y + az = 7 \end{cases}$ 恰有一組解，且此方程組經過一系列的高斯消去

法運算後，原來的增廣矩陣可化為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \langle ? \rangle & \langle ? \rangle \\ 0 & \langle ? \rangle & \langle ? \rangle & \langle ? \rangle \\ 0 & \langle ? \rangle & \langle ? \rangle & \langle ? \rangle \end{bmatrix}$,

求 $a + 3b + 9c = \frac{\text{15-1}}{\text{15-2}}$ 。

第貳部分：混合題（占 10 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

16 — 17 題組

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ 、 $P = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，其中 P 的反方陣 P^{-1} 存在且滿足 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$ 。

16. 求序組 $(a, b, c) = (\text{16-1}, \text{16-2}, \text{16-3})$ 。（選填題，5 分）

17. 承 16 題，求 $A^n = ?$ （答案請勿以未知數 a, b, c 作答）（非選擇題，5 分）

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 35 2. 134 3. 25 4. 3 5. 245

6. $5x - 2y + z = 7$

7. $-\frac{1}{2}$

8. (8, 4)

9. (1) $(-1, 11)$; (2) $\sqrt{\frac{28}{3}}$

10. (1) $(3, -2, -2)$; (2) 15

11. -4

12. -9

13. $\frac{7}{4}$

14. 24

15. -8

第貳部分：混合題

16. (4, 1, 3)

17. $\begin{bmatrix} 2 - 3^n & -4 + 4 \times 3^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 3^n & -1 + 2 \times 3^n \end{bmatrix}$