

桃園市武陵高中 113 上高二第二次期中考

一、單選題（占 15 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 5 分。

1. 梅森質數是指能表示成的 $2^n - 1$ 質數，記為 M_n 。杜蘭特 於 2024 年宣布找出了目前世界上已知的最大質數 $M_{136279841} = 2^{136279841} - 1$ ，比 2018 年發現的最大質數 $M_{82589933} = 2^{82589933} - 1$ 還多出了 k 位數（例如 131071 比 8191 多出了 2 位數），則 k 最接近下列何數？

(1) $136279841 - 82589933$

(2) $2^{136279841-82589933}$

(3) $2^{136279841} - 2^{82589933}$

(4) $(136279841 - 82589933) \log 2$ 四捨五入至整數位

(5) $\log_2(136279841 - 82589933)$ 四捨五入至整數位

2. 方程式 $\log_x(3x^2 - 2x) = \log_x x^3$ 的實數解 x 一共有幾個？

(1) 1 個

(2) 2 個

(3) 3 個

(4) 0 個

(5) 以上皆非

3. 已知直線 $y = \frac{x}{10}$ 與 $y = \log x$ 的圖形有兩個交點。設 a 、 b 、 c 分別為直線 $y = \frac{x}{10}$ 與 $y = \log(-x)$ 、 $y = \log|-x|$ 、 $y = |\log x|$ 三圖形的交點個數，則 a 、 b 、 c 三數的大小關係為？

(1) $a = b = c$

(2) $a < b = c$

(3) $a = b < c$

(4) $a < b < c$

(5) $a < c < b$

二、多選題（占 20 分）

說明：第 4 題至第 5 題，每題 10 分。（答錯一個選項扣 2 分）

4. 假設 $f(x) = (\sqrt{2})^x$ ，其中 x 為實數，請選出下列正確的選項。

(1) $f(4) = 4$

(2) $f(3) < 3$

(3) $y = f(x)$ 的圖形與 $y = x$ 恰交於一點

(4) 若 $a > \sqrt{2}$ ，則 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形沒有交點

(5) 若 $1 < a < \sqrt{2}$ ，則 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形恰交於兩點

5. 請選出下列正確的選項。（ $e \approx 2.718$ ）

(1) $e^{-e} > 3^{-3}$

(2) $4^{\log_6 \frac{1}{2}} > 3^{\log_6 \frac{1}{2}}$

(3) 已知 $0 < \alpha < \beta$ ，則 $\log(\alpha + \beta) > \frac{1}{2} \log(\alpha\beta) + \log 2$

(4) 已知 $2^\alpha = 3^\beta$ ，則 $\alpha > \beta$

(5) 已知 $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha = \alpha$ ， $\left(\frac{1}{3}\right)^\beta = \beta$ ，則 $\alpha > \beta$

三、填充題（占 65 分）

說明：第 6 題至第 10 題，每題 9 分；第 11 題至第 15 題，每題 4 分。

6. 設 $x = 5^{\log_3 2}$ ，試求 $3^{\log_5 x} = \underline{6-1}$ 。

7. $\log_2(\log_2 9) - \log_2(\log_4 5) + \log_2(\log_3 25) = \underline{7-1}$ 。

8. 心理學中的席克法則說明人們在面對決策時，當選項越多，需要決策的時間就越長。阿奇 每天早上花在決定要穿哪雙球鞋出門的時間 T 符合席克法則，可用下列數學式表示：

$$T = 1 + \log_2(n+1)$$

其中 n 為阿奇 的球鞋數量 (單位為雙)。

已知目前阿奇 有兩雙球鞋，若再購入一雙新球鞋，則阿奇 每天早上花在決定穿哪雙鞋的時間將會變成原來的 $\log_a b$ 倍，其中 a 、 b 皆為小於 10 的正整數。試求數對 $(a, b) = (\underline{8-1}, \underline{8-2})$ 。

9. 設 a 、 b 為正實數且 $\log_4 a = 7$ ， $\log_8 b = 5$ ，則與 $\log_2(a+b)$ 之值最接近的整數為 $\underline{9-1} \underline{9-2}$ 。

10. 摩爾定律是指積體電路上可容納的電晶體數目每個月呈指數成長，每 18 個月便增加一倍。依據摩爾定律，至少要 $\underline{10-1} \underline{10-2}$ 個月後，積體電路上可容納的電晶體數目才會超過原來數量的 10 倍。
($\log 2 \approx 0.3010$)

11. 滿足不等式 $\log_{\frac{1}{10}}(x-20) > \log_{\frac{1}{100}}(336-6x)$ 的整數 x 共有 $\underline{11-1} \underline{11-2}$ 個。

12. 將 $y = 2^x$ 的圖形以 y 軸為基準線水平伸縮 $\log_a b$ 倍，所得圖形與 $y = 6^x$ 的圖形重合，其中 a 、 b 皆為小於 10 的正整數，試求 $(a, b) = (\underline{12-1}, \underline{12-2})$ 。

13. 設 n 為正整數，若 $\left(\sqrt{\frac{1}{27}}\right)^n$ 在小數點後第 4 位才開始出現不為 0 的數字，則此不為 0 的數字是 $\underline{13-1}$ 。
($\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$)

14. 行政院為落實全民節電，於 103 年訂定各機關學校須達成每年節電 1% 以上之目標值，即每年用電量較前一年度減少 1% 以上。假設本校每年都恰好節電 1%，以 102 年用電量為基準，實施第一年 (103 年) 用電量為 102 年用電量的 99%，實施第二年 (104 年) 用電量為 102 年用電量的 $99\% \times 99\% = 98.01\%$ ， $\dots$ ，依此類推。則至少實施至第 $\underline{14-1} \underline{14-2}$ 年，可達成節電 20% 的目標 (即該年用電量小於等於 102 年用電量的 80%)
($\log 8 \approx 0.9030$, $\log 9 \approx 0.9542$, $\log 11 \approx 1.0414$)

15. 阿奇 儲蓄多年準備在今年買房，銀行評估後能給阿奇 的房屋貸款年利率為 2.4%。若阿奇 打算每個月的房貸支出最多為 4 萬元，並以 30 年無寬限期採本息平均攤還法還款，即每個月複利一次，每個月繳納相同的金額，分 360 個月還清。則阿奇 向銀行貸款的最高金額為 15-1 15-2 15-3 15-4 萬元。(單位為萬元，答案請四捨五入至整數位)

($1.024^{30} \approx 2.037$, $1.024^{-30} \approx 0.491$, $1.002^{360} \approx 2.053$, $1.002^{-360} \approx 0.487$)

參考答案

1. 4 2. 1 3. 2

4. 125 5. 135

6. 2

7. 3

8. (6, 8)

9. 16

10. 60

11. 11

12. (6, 2)

13. 2

14. 23

15. 1028