

桃園市武陵高中 113 上高二期末考

一、單選題（占 12 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 6 分。

1. 設 $\vec{u} = (3, 6)$ ， $L: 2x - 6y = 1$ ，若 $\vec{v}$ 與 L 垂直，且 $\vec{u}$ 在 $\vec{v}$ 上的正射影為 $\vec{p} = (\alpha, \beta)$ ，則 $\alpha + 3\beta = ?$

- (1) -12
- (2) 12
- (3) -15
- (4) 15
- (5) 18

2. 設 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| \neq 0$ ，且 $(\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (2\vec{a} - \vec{b})$ ，若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ ，求 $\cos \theta = ?$

- (1) $-\frac{1}{2}$
- (2) $-\frac{2}{3}$
- (3) $-\frac{3}{4}$
- (4) $-\frac{5}{6}$
- (5) $-\frac{7}{8}$

二、多選題（占 27 分）

說明：第 3 題至第 5 題，每題 9 分。(9-6-3-0)

3. 關於向量的敘述，下列哪些選項正確？

(1) 若 A 、 B 、 C 、 D 為平面上相異四點，則 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$

(2) 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 均為平面上非零向量， $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的方向必相反

(3) 設 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 為平面上任意向量，則 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$

(4) 設 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 為平面上向量， $\vec{a}$ 為非零向量，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，則 $\vec{b} = \vec{c}$

(5) 若二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 有解，則 $\vec{a} = (a_1, b_1)$ 與 $\vec{b} = (a_2, b_2)$ 不平行

4. 設 a 為實數，關於二元一次方程組 $\begin{cases} 2x + (2-a)y = a \\ (1+a)x - 2y = 6 \end{cases}$ 的解，下列哪些選項正確？

(1) 當 $a = 2$ 時，方程組恰有一解

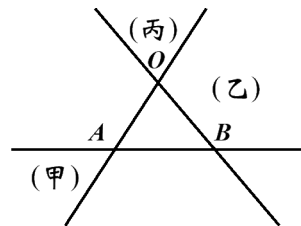
(2) 若方程組恰有一解，則 $a \neq -2$

(3) 若方程組有無限多解，則 $a = 6$

(4) 當 $a = -2$ 時，方程組無解

(5) 若方程組恰有一解，則解為 $\left(\frac{4}{a+2}, \frac{a+4}{a+2}\right)$

5. O 、 A 、 B 、 P 為平面上相異四點，且 O 、 A 、 B 不共線，設 $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$ ， r 、 s 為實數，則下列哪些選項正確？



(1) 若數對 $(r, s) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}\right)$ ，則 P 點落在 $\triangle OAB$ 外

(2) 若數對 $(r, s) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ，則 P 點落在 $\overrightarrow{AB}$ 上

(3) 若 P 點落在區域(甲)，則 $r + s < 1$

(4) 若 P 點落在區域(乙)，則 $r + s > 1$

(5) 若 $rs < 0$ ，則 P 點必不落在區域(丙)

三、填充題（占 61 分）

說明：第 6 題至第 9 題，每格 7 分；第 10 題至第 12 題，每格 4 分。

6. (1) 求行列式 $\begin{vmatrix} 23 & 24 \\ 25 & 26 \end{vmatrix}$ 的值 = $\textcircled{6-1} \textcircled{6-2}$ 。

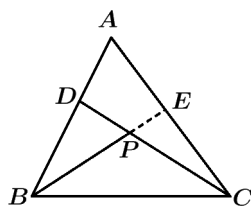
(2) 求方程組 $\begin{cases} 23x + 24y = -1 \\ 25x + 26y = 1 \end{cases}$ 之解 $(x, y) = (\textcircled{6-3} \textcircled{6-4}, \textcircled{6-5} \textcircled{6-6} \textcircled{6-7})$ 。

7. 歐拉 (Euler, 1707~1783) 於 1765 年提出了著名的歐拉線定理“三角形的垂心 H 、重心 G 與外心 O 在一條直線上，且重心介在外心與垂心之間， $\overline{OG} : \overline{GH} = 1 : 2$ ”。若 $\triangle ABC$ 中， $A(-2, 7), B(6, 3), C(4, -1)$ ，已知外心 $O(1, 3)$ ，則垂心 H 的坐標為 $(\textcircled{7-1}, \textcircled{7-2})$ 。

8. $\triangle ABC$ 中， D 在 $\overline{AB}$ 上， $3\overline{AD} = 2\overline{BD}$ ， P 在 $\overline{CD}$ 上， $\overline{CP} = 2\overline{PD}$ ，

(1) 設 $\overrightarrow{BP} = r\overrightarrow{BA} + s\overrightarrow{BC}$ ，則 $5r + 6s = \textcircled{8-1}$ 。

(2) 將 $\overline{BP}$ 延長至 $\overline{AC}$ ，交 $\overline{AC}$ 於 E 點，則 $\overline{AE} : \overline{EC} = \textcircled{8-2} : \textcircled{8-3}$ 。



9. 設平面上三點 $A(-1, 5), B(x, 3), C(4, y)$ ，若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 44$ ，則 $x^2 + y^2$ 有最小值 $\textcircled{9-1} \textcircled{9-2}$ ，此時 $(x, y) = (\textcircled{9-3}, \textcircled{9-4} \textcircled{9-5})$ 。

10. 設 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ， $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ， $\vec{c} = (x_3, y_3)$ ，若 $(3\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 12$ ，

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2y_1 \\ 3x_1 + x_2 & 3x_1 + y_2 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} x_1 + 2y_1 & 2x_1 + 3y_1 \\ x_3 + 2y_3 & 2x_3 + 3y_3 \end{vmatrix} = 5,$$

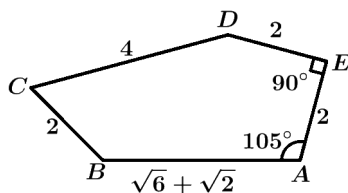
則 $|\vec{b}| : |\vec{c}| = \textcircled{10-1} : \textcircled{10-2} \textcircled{10-3}$ 。

11. 瑋瑋在座標平面上的原點沿著 $(1, 3)$ 方向出發，走了 $4\sqrt{5}$ 單位後立刻右轉 45° 繼續直行，再走了 $4\sqrt{10}$ 後又立刻右轉 90° 繼續直行，則再走 $\textcircled{11-1} \sqrt{\textcircled{11-2} \textcircled{11-3}}$ 單位可到達 x 軸。

12. 美國 華盛頓大學研究團隊 2015 年發現了一種新的不規則五邊形，相互組合後可完全鋪滿平面，不會出現重疊或有任何空隙，是全球第 15 種能做到此效果的五邊形。示意圖如下，設

$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AE} + y\overrightarrow{AB}$ ，則實數 $y = \textcircled{12-1} - \textcircled{12-2}\sqrt{\textcircled{12-3}}$ 。

$$\left(\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)$$



参考答案

1. 2 2. 1

3. 23 4. 124 5. 25

6. (1) -2 ; (2) $(25, -24)$

7. $(6, 3)$

8. $4 : 5 : 6$

9. 29; $(5, -2)$

10. $5 : 13$

11. $5\sqrt{10}$

12. $4 - 2\sqrt{3}$

5