

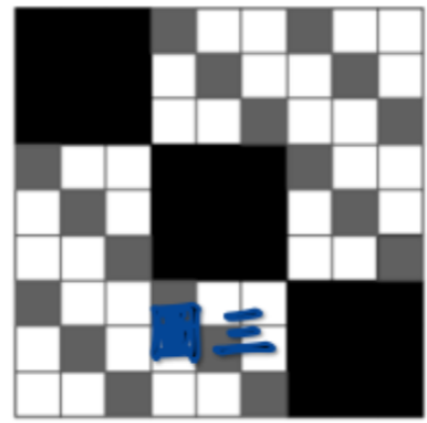
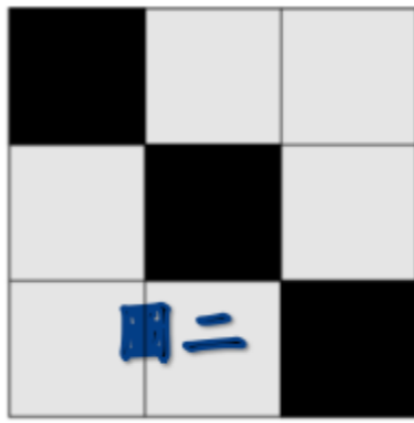
臺北市立第一女子高級中學 113 學年度第一學期第一次期中考 高三數學乙 文組 試題

註：總分超過 100 分者，以 100 分計；班級、座號等欄位劃記錯誤者，扣 10 分。

一、單選題（20 分）

說明：每題答對者得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者得 0 分。

1. 下圖一為邊長為 1 的白色正方形，將其平分成 9 塊，並把左上到右下的三塊塗成黑色，如圖二。接著將剩下六塊白色正方形平分成 9 塊，並把左上到右下三塊塗成黑色，如圖三。重複這樣的步驟，設 a_n 表示第 n 個圖形的黑色正方形的面積總和，其中 $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{5}{9}$ 。試求 a_4 為下列哪個選項？



- (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{7}{9}$ (3) $\frac{8}{9}$ (4) $\frac{16}{27}$ (5) $\frac{19}{27}$

2. 承上題，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 為下列哪個選項？

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) 1 (5) 不存在

3. 無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_n = \frac{(-1)^{n-1} \times 113}{10^n}$ 。若當 $n \geq k$ 時， $|a_n - 0| < \frac{1}{2024}$ ，則此整數 k 值的最小值為下列哪個選項？

- (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7 (5) 8

4. 設 α 為方程式 $x^3 3^x = 3^{10}$ 的正實根，則 α 是介在哪兩個整數之間？

- (1) 2 和 3 (2) 3 和 4 (3) 4 和 5 (4) 5 和 6 (5) 6 和 7

二、多選題（50分）

說明：每題答對者得10分，每題各有五個選項。每個選項2分，所有選項均未作答，該題以0分計算。

5. 關於 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 兩數列，試判斷下列敘述哪些正確？

(1) 若 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 皆為收斂數列，則數列 $\langle a_n - b_n \rangle, \langle a_n \times b_n \rangle$ 必定收斂

(2) 若 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 皆為收斂數列，則數列 $\langle a_n \div b_n \rangle$ 可能發散

(3) 若 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列且 $\langle b_n \rangle$ 為發散數列，則數列 $\langle a_n + 3b_n \rangle$ 必定發散

(4) 若 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 皆為發散數列，則數列 $\langle a_n + 3b_n \rangle$ 必定發散

(5) 若 $a_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^{(n-1)}$ ，則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，且收斂到 $\frac{3}{7}$

6. 若函數 $y = f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸，則稱 $f(x)$ 為偶函數。試問下列哪些選項為偶函數？

(1) $f_1(x) = 4x$

(2) $f_2(x) = 3x^4 - x^2$

(3) $f_3(x) = 2x^2 + 4x$

(4) $f_4(x) = |\sin 2x|$

(5) $f_5(x) = \frac{4}{x}$

7. 已知函數 $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ ， $g(x) = \frac{1}{x+3}$ ，請選出正確的選項。

(1) $f(x)$ 的定義域為 $\{x \mid -4 < x < 4, x \in \mathbb{R}\}$

(2) $g(x)$ 的定義域為 $\{x \mid x \neq -3, x \in \mathbb{R}\}$

(3) $\frac{1}{f(x)}$ 的值域為 $\left\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{4}, y \in \mathbb{R}\right\}$

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ 的值域為 $\{y \mid 0 \leq y \leq 4, y \in \mathbb{R}\}$

(5) $f \circ g(x)$ 的圖形為圓形

8. 無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 中，奇數項是一個公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，而偶數項是一個公比為 $\frac{1}{3}$ 的等比數列，

且 $a_1 = 4, a_2 = 3$ ，試判斷下列敘述哪些正確？

(1) $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$

(2) $a_{113} > a_{114} > a_{115} > a_{116}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(4) 若 $b_n = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}$ ，其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ ，則無窮數列 $\langle b_n \rangle$ 是公比為 $\frac{2}{3}$ 的等比數列

(5) 承(4)， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3$

9. 考慮函數 $f(x) = \begin{cases} |2x| - 3, & x \geq 3 \\ a(x-1)^3 - 4(x-1) + 3, & -1 \leq x < 3 \\ -(x-2)^2 + b, & x < -1 \end{cases}$ ，且已知 $f(x)$ 是一個連續函數。

$g(x) = [x]$ ，其中 $[]$ 為高斯符號，表示不大於 x 的最大整數。

請選出正確的選項。

(1) $a = 1$

(2) $b = 12$

(3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = 8$

(4) $g(-1.13) = -1$

(5) $\lim_{x \rightarrow 2024} g(x) = 2024$

三、填充題（40分）

說明：每格答對得5分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

1. 求下列各極限值（若無極限值，請於答案卡上劃記“±”）

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{4499}{n} - \frac{20241001}{n^2}) = \underline{\text{a}}$ 。

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3^{n+2024} + 5^n}{8^{n-113}}) = \underline{1!}$ 。

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{3x^2-2}{x^2}) = \underline{1@}$ 。

(D) $\lim_{x \rightarrow 3} (\frac{x^2+x-12}{x-3}) = \underline{1\#}$ 。

(E) $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{|3x^2-8|-4}{3x-6}) = \underline{1\$}$ 。

(F) 已知函數 $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin \frac{1}{x}) = \underline{1\%}$ 。

2. 已知 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 20$ ， $\sum_{k=1}^{10} b_k = 50$ ， $\sum_{k=1}^{10} (3a_k - b_k + 2) = \underline{1^1\&}$ 。

3. 首項為 $0.\bar{4}$ ，公比為 $0.\bar{2}$ 的無窮等比級數和為 $\underline{\frac{1^*}{1(}}}$ 。

臺北市立第一女子高級中學 113 學年度第一學期第一次期中考高三數學乙 文組 答案

註：總分超過 100 分者，以 100 分計；班級、座號等欄位劃記錯誤者，扣 10 分。

一、單選題（20分）

1.	2.	3.	4.
5	4	3	4

二、多選題（50分）

5. 123	6. 24	7. 2	8. 134	9. 123
---------------	--------------	-------------	---------------	---------------

三、填充題（40分）

1.(A)	1.(B)	1.(C)	1.(D)	1.(E)	1.(F)	2.	3.
2	0	不存在	7	4	0	30	$\frac{7}{:}$