

彰化縣彰化女中 113 下高一期末考

一、多選題（占 15 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

1. 下列選項哪些正確？

(1) $\sin 20^\circ > \cos 20^\circ$

(2) $\frac{1}{\tan^2 20^\circ} - \frac{1}{\sin^2 20^\circ} = -1$

(3) $\sin 167^\circ > \cos 284^\circ$

(4) 點 $(\cos \theta \sin \theta, \cos \theta \tan \theta)$ 位於第三象限，則 θ 為第二象限角

(5) 角度 θ 的最小正同界角及最大負同界角的和為 78° ，則 θ 為第二象限角

2. 若 $30^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ ，為求出 $f(\theta) = 2 - \sin^2 \theta - \cos \theta$ 的最大及最小值，假設 $\cos \theta = t$ ，選出下列正確的選項

(1) $-1 \leq t \leq 1$

(2) $f(\theta)$ 可變換成 $g(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

(3) 當 $\cos \theta = -1$ 時， $f(\theta)$ 的最大值為 3

(4) 當 $\theta = 30^\circ$ 時， $f(\theta)$ 最小值為 $\frac{7-2\sqrt{3}}{4}$

(5) 當 $\theta = 135^\circ$ 時， $f(\theta)$ 的最大值為 $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

3. 已知廣義角 θ, ϕ 為同界角，若 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ，依上述條件選出下列正確的選項

(1) $\frac{\phi}{3}$ 有可能為第一象限角

(2) $\frac{\phi}{3}$ 有可能為第二象限角

(3) $\frac{\phi}{3}$ 有可能為第三象限角

(4) $\sin \frac{\phi}{3}$ 的值有可能介於 $-\frac{1}{2}$ 及 0 之間

(5) $\sin \frac{\phi}{3}$ 的值有可能大於 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填充題（占 70 分）

說明：第 4 題至第 17 題，每題 5 分。

4. $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 7\text{ cm}$ 、 $\overline{AC} = 5\text{ cm}$ 、 $\overline{AB} = 8\text{ cm}$ ，試求出 $\triangle ABC$ 的外接圓面積為【 】 cm^2 。

5. 假設 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{5}$ ，試求出 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta =$ 【 】。

6. $\sin 150^\circ \times \cos 180^\circ + \tan 225^\circ \times \tan(-315^\circ) - \cos(-660^\circ) \times \sin 630^\circ =$ 【 】。

7. 已知 $\tan \theta = \frac{1}{3}$ ， $\cos \theta < 0$ ，則 $\frac{1}{1 + \sin^2 \theta} + \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} =$ 【 】。

8. 若 $\cos 200^\circ = k$ ，試以 k 表示 $\tan 340^\circ =$ 【 】。

9. 已直線 $L_1: x + \sqrt{3}y = 0$ ， $L_2: x + y + 2 = 0$ ，試求兩直線所夾的銳角為【 】度。

10. 在極坐標中，假設 $A[3\sqrt{2}, 135^\circ]$ ， $B[2\sqrt{2}, 195^\circ]$ ，試求兩點之間的距離為【 】。

11. 假設 $180^\circ < \theta < 360^\circ$ ，若 $2\sin^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$ ，則 $\theta =$ 【 】度。

12. $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 120^\circ$ ， $\angle A$ 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D ，若 $\overline{AB} = 12\text{ cm}$ ， $\overline{AC} = 9\text{ cm}$ ，試求 $\overline{AD} =$ 【 】 cm 。

13. 圓內接四邊形 $ABCD$ ， $\overline{AB} = \overline{BC} = 3\text{ cm}$ ， $\overline{CD} = 5\text{ cm}$ ， $\overline{DA} = 8\text{ cm}$ ，對角線 $\overline{BD} =$ 【 】 cm 。

14. 現有某大樓一棟，甲同學為了測量該大樓高度，使用下列方式：站在地面上某地目視測得樓頂仰角為 30° ，再朝大樓的方向筆直前進 30 公尺後目視測得樓頂仰角為 60° ，試問大樓高度為【 】公尺。（甲同學眼睛離地面 160 公分）

15. $x^2 + \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)x + 2 = 0$ 的一根為 $\sqrt{3} - 1$ ，試問 $\sin \theta \cos \theta =$ 【 】。

16. 湖邊有一塔，湖內有一艘船在塔的正西方一點測得塔頂之仰角為 30° ，然後此船便向東 30° 南的方向筆直航行，航行 100 公尺後在另一點又測得塔頂之仰角為 45° ，若在這一段航線中某個點所測得之仰角 θ 為最大，試問 $\tan \theta =$ 【 】。

17. 現有甲、乙兩大樓，在甲大樓西 60° 南方向上的地上某 A 點測得樓頂的仰角為 60° 。乙大樓位於甲大樓的東 15° 南方向上，在甲大樓測得乙大樓樓頂的俯角為 30° ，同時乙大樓位於 A 點的東 15° 北方向上。若甲大樓高度 $50m$ ，試問乙大樓高度為【 】 m 。

三、計算證明題（占 15 分）

說明：第 18 題至第 20 題，每題 5 分。

18. $\triangle ABC$ 中 D, E, F 分別位於 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 上，且 $\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = t$ ，則當

$t =$ 【 】時 (2 分)， $\frac{\triangle DEF \text{面積}}{\triangle ABC \text{面積}}$ 的最小值為【 】。(3 分)

19. $\triangle ABC$ 中， $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長為 a, b, c ，若 $\angle B = 60^\circ$ 且 $2b^2 - 7ac = 0$ ，試求 $\sin A + \sin C =$ 【 】。

20. 令 $a, b, c > 0$ ，試問 $\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{a^2 + c^2 - ac} \geq \sqrt{b^2 + c^2 + bc}$ 是否成立？若成立則證明之，若不成立則舉一個反例。

參考答案

1. 2 2. (1)25 3. 12

4. $\frac{49}{3}\pi$

5. $\frac{99}{125}$

6. 1

7. $\frac{300}{209}$

8. $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$

9. 15

10. $\sqrt{14}$

11. 300

12. $\frac{36}{7}$

13. 7

14. $15\sqrt{3} + 1.6$

15. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

16. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ or 1

17. $50 - \frac{50\sqrt{2}}{3}$

18. $t = \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$

19. $\sqrt{\frac{39}{28}}$

20. 成立