

113 學年度第二學期第三次定期考高二數 B 試題

命題範圍：4-1 矩陣的定義與運算、4-2 乘法反方陣與矩陣的應用。

一、填充題（每題 5 分，共 100 分）

1. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ ，試問：
(1) 矩陣 A 是_____階矩陣，(2) 矩陣 A 的第 (2,1) 元是_____。
2. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} a+1 & 4 \\ 3 & b-2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 6 & d+8 \\ c-7 & 5 \end{bmatrix}$ ，其中 a, b, c, d 皆為實數，已知 $A = B$ ，試求 $a+b+c+d$ 的值。
3. 已知矩陣 $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ ，其中 $a_{ij} = 4i - 5j$ ，試求矩陣 A 。
4. 已知矩陣 $A = [a_{ij}]_{8 \times 8}$ ，其中 $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{若 } i > j \\ j, & \text{若 } i \leq j \end{cases}$ ，試求矩陣 A 所有元的總和。
5. 設 A, B, X 皆為二階方陣，已知 $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ， $2X + 3A = 4B$ ，
試求二階方陣 X 。
6. 已知 $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$ ，
試求 $AB + AC + 2B - 3C$ 。
7. 設 A, B 皆為二階方陣，已知 $2A + 3B = \begin{bmatrix} 23 & 12 \\ 4 & 22 \end{bmatrix}$ ， $A - B = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，
試求 $A^2 - B^2$ 。

8. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, 其中 a, b 皆為實數, 已知

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, 試求數對 (a, b) 。

9. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, 試求 A 的乘法反方陣 A^{-1} 。

10. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} k & 4 \\ 1 & k-3 \end{bmatrix}$, 其中 k 為實數, 已知 A 的乘法反方陣不存在,

試求實數 k 值。

11. 設 $A = \begin{bmatrix} 5 & a \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 其中 a, b, c, d 皆為實數, 已知 $B = A^{-1}$,

試求序組 (a, b, c, d) 。

12. 設 A 為二階方陣, 已知 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$, 試求二階方陣 A 。

13. 設三個平面向量 $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (5, 6)$, $\vec{c} = (-45, 98)$, 已知 $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$,
其中 x, y 皆為實數, 試求數對 (x, y) 。

14. 設 A, B, C, X, Y 皆為二階方陣, 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$, $AX = B$, $CX = Y$, 試求二階方陣 Y 。

15. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 試求 A^6 的所有元之總和。

16. 設二階方陣 $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$, 已知 $B = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{203}$,

試求 $\det(B)$ 的值。

17. 設 A 為二階方陣，已知 $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 32 & 57 \end{bmatrix}$ ， $A^3 = \begin{bmatrix} 73 & 130 \\ 260 & 463 \end{bmatrix}$ ，試求二階方陣 A 。

18. 將英文字母用矩陣依序編碼，例如： a 以 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 表示， b 以 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 表示， z 以 $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

表示，像是單字 *box* 就以 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ 表示。為了保密，先將單字以矩陣 A 表

示，然後計算 BA ，其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，最後將矩陣 BA 傳出。假設最後傳出

的矩陣為 $\begin{bmatrix} 13 & 2 & 19 & 19 \\ 27 & 4 & 39 & 39 \end{bmatrix}$ ，試問原單字為何？

19. 設 A, B 皆為二階方陣，已知 $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $AB = BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，

而 $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，其中 a, b, c, d 皆為實數，試求序組 (a, b, c, d) 。

20. 設 A 為二階方陣，已知 $A^2 - 2A + 3I_2 = O_{2 \times 2}$ ，其中 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，

試求二階方陣 $(2I_2 - A)$ 的乘法反方陣。

答案請用 $5A, A^6, 3A + 4I_2$ 這類形式呈現。