

新竹市新竹高中 113 上高二第一次期中考 2B

一、多選題（占 28 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 7 分。(7-4-1-0)

1. 判斷下列各方程式的實根個數，請選出正確的選項。

(1) 若 a 為實數且 $a > 1$ ，方程式 $a^x = \log_a x$ 沒有實根

(2) 方程式 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 \frac{1}{x}$ 有一個實根

(3) 方程式 $2^{-x} = x^2$ 有二個實根

(4) 若 a 為實數且 $a > 1$ ，方程式 $|\log_a x| = \frac{x}{a}$ 有三個實根

(5) 方程式 $|\log_2 |x|| = 2^x$ 有四個實根

2. 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，下列關於指數函數與對數函數的敘述，請選出正確的選項。

(1) 指數函數 $y = f(x) = a^x$ 必通過點 $(0, 1)$ ，
而對數函數 $y = f(x) = \log_a x$ 必通過點 $(1, 0)$

(2) 對於任意兩相異正實數 x_1 與 x_2 ，指數函數 $y = f(x) = a^x$
恆有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

(3) 對於任意兩相異正實數 x_1 與 x_2 ，指數函數 $y = f(x) = a^x$

恆有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

(4) 對於任意兩相異正實數 x_1 與 x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，則對數函數 $y = f(x) = \log_a x$
恆有 $f(x_1) > f(x_2)$

(5) 對數函數 $y = f(x) = \log_a x$ 圖形的漸近線為 $x = 0$

3. 在坐標平面上，下列關於指數函數與對數函數之平移與對稱關係，請選出正確的選項。

(1) 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $y = a^x$ 的圖形與對數函數 $y = \log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y = x$

(2) 將指數函數 $y = 2^x$ 的圖形對稱 x 軸後，得指數函數 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形

(3) 將對數函數 $y = \log_2 x$ 的圖形對稱 y 軸後，得對數函數 $y = \log_2 \frac{1}{x}$ 的圖形

(4) 將指數函數 $y = 2^x$ 的圖形向右平移 3 單位，再向上平移 2 單位，
得指數函數 $y = 2^{x+3} + 2$ 的圖形

(5) 將對數函數 $y = \log_2 x$ 的圖形向左平移 3 單位，再向下平移 2 單位，

得對數函數 $y = \log_2 \left(\frac{x-3}{4}\right)$ 的圖形

4. 下列關於指數與對數運算的敘述，請選出正確的選項。

(1) 若 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ ，且 x 與 y 皆為正實數，則 $\log(x+y) = \log x \cdot \log y$

(2) 若 $a > 0$ 且 x 與 y 皆為實數，則 $a^{xy} = a^{xy}$

(3) 若 a 、 b 、 c 三數皆為正實數且 $b \neq 1$ ，則 $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

(4) 若 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ ，且 n 為實數，則 $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

(5) $(\log_2 3) \cdot (\log_6 8) = \log_6 27$

二、填充題（占 59 分）

說明：第 5 題至第 15 題。

答對題數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得分	0	8	15	21	27	33	38	43	48	52	56	59

5. 計算 $2^{\log_{\frac{1}{2}} 4} - \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} + \log \frac{1}{100} + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) =$ 【 】。

6. 解方程式 $2 \cdot \log_2 x = 2 + \log_2 (x+3)$ ，則 x 的解為【 】。

7. 不等式 $-\frac{1}{3} \cdot \log_2 (2x-1)^2 > 2 \cdot \log_{\frac{1}{8}} (4-x)$ 的解 x 之範圍為【 】。

8. 不等式 $(0.3)^{x^2-3x-2} < 0.09$ 的解 x 之範圍為【 】。

9. 將 $\left(\frac{3}{35}\right)^{50}$ 寫為純小數表示後，其在小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數字，且這個首次出現不為 0 的數為 a ，則數對 $(n, a) =$ 【 】。

10. 已知函數 $f(x) = 2^{2x+2} - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 2^{-2x+2} - 16$ ，則 $f(x)$ 的最小值為【 】。

11. 已知實數 a 、 b 、 c 滿足： $a \cdot 2^a = 1$ 、 $b \cdot 3^b = 1$ 、 $c \cdot \log_2 c = 1$ ，則 a 、 b 、 c 三數的大小關係【 】。

12. 金融學上有所謂的「72 法則」，所謂的 72，就是用數字 72 除以報酬率(%) 所得到的結果就是本金翻倍需要年數。例如陳先生將一筆 100 萬存入銀行，年化報酬率為 2%，所以根據 72 法則，「 $72 \div 2 = 36$ 」，則約需要 36 年可以翻倍為 200 萬。今有一個投資產品，年化報酬率為 6%，以 72 法則計算可知需要 12 年即可將本金翻倍，若今改以「複利計算」，則將本金翻倍需要【 】年。

(四捨五入至小數點後第一位， $\log 1.06 \approx 0.0253$)

13. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} \log_2(x-1) & , x > 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x & , x \leq 1 \end{cases}$ ，若 $f(a) \geq 2$ ，則 a 的範圍為【 】。

14. 化簡 $(\log 5)^3 + (\log 20)^3 + (\log 8)(\log 0.25) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 基本傳染數 (R_0 ，Basic Reproduction Number) 又稱基本再生數，在流行病學上簡單來說是指，平均一個疾病感染者可以將該疾病傳染給多少人，如 SARS 的 R_0 為 2 ~ 5，COVID-19 之 Delta 變異株的 R_0 約為 5.1，水痘的 R_0 為 10 ~ 12，這個數值會隨著變因的不同有所變化，而非固定的一個數字。若今天爆發新型流感病毒的疫情，專家學者研究之後提供相關的數據，其 R_0 值為 3，且平均約 1 天就會傳染給別人，假設每人只會被傳染與傳染給他人各 1 次，某市市民共 400 萬人，若今有一名市民感染此新流感(全市第一位，且未就醫)，請預估在無人就醫的情況下，全市約幾天後超過一半的市民會被傳染？

【 】。(四捨五入至整數位)

三、計算題（占 13 分）

說明：第 16 題至第 17 題。

16. 某化工企業積極的響應節約資源與保護環境的政策，探索改良工藝，使排放的廢氣中含有的污染物數量逐漸減少。已知改良工藝前所排放的廢氣中含有的污染物數量為 2 mg/m^3 ，首次改良後所排放的廢氣中含有的污染物數量為 1.94 mg/m^3 。假設改良工藝前所排放的廢氣中含有的污染物數量為 r_0 ，首次改良工藝後所排放的廢氣中含有的污染物數量為 r_1 ，則第 n 次改良工藝後所排放的廢氣中含有污染物數量為 r_n ，則有函數模型 $r_n = r_0 - (r_0 - r_1) \cdot 5^{0.5n+p}$ ，其中 p 為實數， $n \geq 1$ 且 n 為整數，試回答下列問題：

(1) $p = ?$ (3 分)

(2) 依據國家環保要求，企業所排放的廢氣中含有的污染物數量不能超過 0.08 mg/m^3 ，則該化工企業至少進行多少次工藝改良後，才能使其所排放的廢氣中含有的污染物數量達到標準？(5 分)

17. 有多少個整數 n 使得 $\sqrt{\frac{\log(n^4) - (\log n)^2}{\log n - 3}}$ 為實數？(5 分)

參考答案

1. 24

2. 125

3. 1

4. 35

5. $\sqrt{3} - \sqrt{2} - 4$

6. 6

7. $-3 < x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{3}$

8. $x > 4$, $x < -1$

9. (54, 4)

10. -24

11. $c > a > b$

12. 11.9

13. $a \geq 5$, $a \leq -1$

14. 2

15. 13

16. (1) -0.5 ; (2) 6 次

17. 9001 個